Exercice 18.2 page 180

Détaillons pourquoi l'application $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ *est bien un produit tensoriel.*

Remarquons plusieurs choses :

- Si A,B sont des matrices, alors
$$(\lambda \mathrm{A}) \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes (\lambda \mathrm{B}).$$
- L'application $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{M}_p(\mathbf{C}) \to \mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C})$ définie par $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est linéaire à droite :
$$\mathrm{A} \otimes (\lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{B}') = \lambda\,\mathrm{A}\otimes\mathrm{B} + \mu\,\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}',$$
mais également linéaire à gauche :
$$(\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{A}') \otimes \mathrm{B} = \lambda\,\mathrm{A}\otimes\mathrm{B} + \mu\,\mathrm{A}'\otimes\mathrm{B}.$$
Elle est donc bien bilinéaire.
- si $(a,b) \in [\![1\,;np]\!]^2$, on pose
$$i = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + 1 \qquad k = a - n(i-1)$$
de sorte que
$$a = n(i-1) + k.$$
En fait, le couple $(i-1,k)$ est donné par le quotient et le reste de la division euclidienne de a par n.
De même, on note (j,ℓ) l'unique couple d'entiers vérifiant $b = p(j-1)+\ell$.
Avec ces notations, on a donc
$$\underbrace{\mathrm{E}_{ij}}_{\in\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})} \otimes \underbrace{\mathrm{E}_{k\ell}}_{\in\mathfrak{M}_p(\mathbf{C})} = \underbrace{\mathrm{E}_{a,b}}_{\in\mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C})}.$$
On gardera désormais ces notations : à chaque couple (a,b), on associera implicitement les couples (i,j) et (k,ℓ) de cette manière.

—

On note $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{F} = \mathfrak{M}_p(\mathbf{C})$. Soit maintenant G un espace vectoriel. Soit $f : \mathrm{E}\times\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ une application bilinéaire.

L'action de f est entière déterminée par les images
$$f\big(\mathrm{E}_{ij},\mathrm{E}_{k\ell}\big) \qquad (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2 \times [\![1\,;p]\!]^2.$$

- On définit maintenant une application linéaire $f^* : \mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C}) \to \mathrm{G}$, en spécifiant simplement son action sur la base canonique de $\mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C})$:
$$f^*(\mathrm{E}_{ab}) \overset{\text{déf.}}{=} f(\mathrm{E}_{ij},\mathrm{E}_{k\ell}).$$
Remarquons que cette première relation est évidemment nécessaire (ce qui assure la partie *unicité* du théorème)...

Puisqu'on impose à f^* d'être linéaire, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C})$, que l'on décompose en

$$\mathrm{M} = \sum_{a,b} m_{ab}\,\mathrm{E}_{ab} = \sum_{i,j,k,l} m_{n(i-1)+k,p(j-1)+\ell}\,\mathrm{E}_{ij} \otimes \mathrm{E}_{k\ell}$$

l'image de M par f^* est donc

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{M}) &= \sum_{i,j,k,\ell} m_{n(i-1)+k,p(j-1)+\ell}\,f^*(\mathrm{E}_{ij} \otimes \mathrm{E}_{k,\ell}) \\ &= \sum_{i,j,k\,ell} m_{n(i-1)+k,p(j-1)+\ell}\,f(\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{k\ell}). \end{aligned}$$

- Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^* \circ \varphi$ et f coïncident.
Si $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{C})$, alors

$$\begin{aligned} f(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= f\left(\sum_{i,j} a_{ij}\,\mathrm{E}_{ij}, \sum_{k,\ell} b_{k,\ell}\,\mathrm{E}_{k\ell}\right) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} a_{ij}\,b_{k\ell}\,f(\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{k\ell}) \end{aligned}$$

par bilinéarité de f.
Si on note $\mathrm{M} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$, elle est de coefficient général

$$m_{n(i-1)+k,p(j-1)+\ell} = a_{ij}\,b_{k\ell},$$

donc

$$\begin{aligned} f^* \circ \varphi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= f^*(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} m_{n(i-1)+k,p(j-1)+\ell}\,f(\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{k\ell}) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} a_{ij}\,b_{k\ell}\,f(\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{k\ell}) \\ &= f(\mathrm{A}, \mathrm{B}). \end{aligned}$$

- **On a gagné !** On a en effet bien montré qu'il existait une unique application $f^* : \mathfrak{M}_{(np)}(\mathbf{C}) \to \mathrm{G}$ telle que $f^* \circ \varphi = f$.