

– Dans le cas où a et b sont nuls,

$$g(x_0) = \frac{-d}{c} f(g(x_0))$$

soit
$$\left(k^2 + \frac{c^2}{d^2}\right) g(x_0) = 0$$

et $g(x_0)$ est nécessairement nul.

On peut donc conclure que si G est liée, alors $g(x_0) = 0$.

Par conséquent,

$$\boxed{G \text{ est liée si et seulement si } g(x_0) = 0.}$$

I.E.3 En se plaçant dans le cas où $g(x_0)$ est non nul, on en déduit que G est libre; c'est donc une base de l'espace F . L'ensemble F est par ailleurs stable par f . On en déduit donc d'après la question I.A que toute f -trajectoire initialisée dans F est incluse dans F . C'est précisément le cas de la trajectoire x initialisée en x_0 qui appartient à F . On peut donc décomposer la trajectoire x dans la base G , d'où l'existence des fonctions u, v, w et h telles que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0)}$$

De plus, par un raisonnement similaire à celui de la question I.D.2, u, v, w et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour déterminer précisément u, v, w et h , on revient à la propriété qui définit les f -trajectoires :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) = f(x(t))$$

En développant dans la base G , on obtient

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) &= f[u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0)] \\ &= u(t)f(x_0) + v(t)f^2(x_0) + w(t)fg(x_0) + h(t)fgf(x_0) \end{aligned}$$

En remarquant que f et g commutent et que $g = f^2 + k^2\mathbf{I}_E$, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) = u(t)f(x_0) + v(t)[g(x_0) - k^2x_0] + w(t)gf(x_0) - k^2h(t)g(x_0)$$

Par ailleurs,

$$x' = u'x_0 + v'f(x_0) + w'g(x_0) + h'fg(x_0)$$

Comme G est une base de F , on obtient alors le système différentiel

$$\begin{cases} u' = -k^2v \\ v' = u \\ w' = v - k^2h \\ h' = w \end{cases}$$

On peut résoudre facilement les équations en u et v puisque $u'' + k^2u = 0$ et $v'' + k^2v = 0$. u et v sont donc de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = a \cos kt + b \sin kt \quad \text{et} \quad v(t) = c \cos kt + d \sin kt$$

On sait de plus que les conditions en $t = 0$ impliquent

$$u(0) = v'(0) = 1 \quad \text{et} \quad v(0) = u'(0) = 0$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = \cos kt \quad v(t) = \frac{\sin kt}{k}}$$

On peut dès lors écrire les équations différentielles formées par w et h en utilisant l'expression de v .

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h''(t) + k^2 h(t) = \frac{\sin kt}{k} \quad \text{et} \quad w''(t) + k^2 w(t) = \cos kt$$

Il existe donc a, b, c et d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} h(x) = \frac{1}{k^2} \int_0^x \sin k(x-t) \sin kt \, dt + a \cos kx + b \sin kx \\ w(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-t) \cos kt \, dt + c \cos kx + d \sin kx \end{cases}$$

Les conditions initiales sont $\begin{cases} h(0) = h'(0) = 0 \\ w(0) = w'(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi, les constantes a, b, c et d sont nulles. On peut alors en déduire l'expression de w et h .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{1}{k^2} \int_0^x \frac{\cos(kx) + \cos(kx - 2kt)}{2} \, dt$$

Le calcul de l'intégrale précédente est alors aisé et on trouve

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{x \cos(kx)}{2k^2}}$$

La formule pour w s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad w(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-t) \cos kt \, dt = \frac{1}{k} \int_0^x \frac{\sin kx + \sin k(x-2t)}{2} \, dt$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad w(x) = \frac{x}{2k} \sin kx}$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n \in \mathbb{Z}} \left| h\left(n \frac{\pi}{k}\right) \right| = +\infty$$

La trajectoire n'est pas bornée.