

## I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $F = \theta(f)$

Certaines questions de cette partie peuvent sembler très simples. Cependant, il faut bien faire attention à en rédiger les réponses correctement. Par exemple, avant de calculer la dérivée d'une fonction, on doit  *systématiquement* préciser que  $f$  est bien dérivable.

Il est également très mal vu, par exemple, de confondre la  *fonction*  $f$  avec l'image d'un élément  $f(t)$  par cette même fonction.

**I.1.1** Si la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 1$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_x^{x+1} 1 \, dt = [t]_x^{x+1} = x + 1 - x = 1$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 1}$$

**I.1.2** Si la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = t^k$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_x^{x+1} t^k \, dt = \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_x^{x+1}$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}}$$

**I.2.1** Notons  $\varphi$  une primitive de  $f$ . Comme  $f$  est continue,  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ . De plus, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

Par composition et addition de fonctions  $\mathcal{C}^1$ ,  $F$  est  $\mathcal{C}^1$ . En outre, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x)$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x+1) - f(x)}$$

**I.2.2** Supposons que  $f$  soit croissante sur un intervalle  $[x_0; +\infty[$ . Alors

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x+1) \geq f(x)$$

d'où

$$\forall x \geq x_0 \quad F'(x) = f(x+1) - f(x) \geq 0$$

donc  $F$  est croissante sur  $[x_0; +\infty[$ . On en déduit

$$\boxed{f \text{ croissante sur } [x_0; +\infty[ \implies F \text{ croissante sur } [x_0; +\infty[}$$

On montre de même que

$$\boxed{f \text{ décroissante sur } [x_0; +\infty[ \implies F \text{ décroissante sur } [x_0; +\infty[}$$