

5 Écrivons la conservation de l'énergie entre le point initial ($\alpha(0) = \alpha_0$ et $\dot{\alpha}(0) = 0$) et un point quelconque, pour la seconde sphère

$$E_t = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 - mg(R-r)\cos\alpha = -mg(R-r)\cos\alpha_0$$

dont on déduit
$$\dot{\alpha}^2 = 2\frac{g}{R-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

De plus, en choisissant $\alpha_0 > 0$, il est clair que $\dot{\alpha} \leq 0$ pendant le temps τ que met la sphère à atteindre le point A et que $\cos\alpha - \cos\alpha_0 \geq 0$. Ainsi

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{R-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

Il ne reste ensuite qu'à séparer les variables et intégrer pour obtenir

$$\tau = \int_0^\tau dt = -\sqrt{\frac{R-r}{2g}} \int_{\alpha_0}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$$

soit au final

$$\tau = \sqrt{\frac{R-r}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$$

| Cette intégrale est elliptique, donc il est inutile de chercher une primitive !

Le temps τ' mis par la première sphère pour atteindre le point A se déduit du temps τ en remplaçant g par $g_{\text{eff}} = 5g/7$, ce qui donne

$$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}$$