> La loi de composition $*$ s'appelle le produit de convolution. Suite au résultat de la question II.D.3, on remarque que ce produit est très naturel, dès qu'il est question de transformée de Laplace ou de Fourier.

II.B.2 Effectuons le changement de variable $t' = x - t$ dans l'intégrale précédente. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé.

$$\begin{aligned}(u * v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} u(x-t')v(t')(-\,\mathrm{d}t') \qquad (t' = x - t) \\ (u * v)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t')v(t')\,\mathrm{d}t'\end{aligned}$$

On remarque que lors du changement de variable $t' = x - t$, on a $\mathrm{d}t' = -\,\mathrm{d}t$, ce qui introduit un signe moins, mais il y a une interversion des bornes de l'intégrale, donc on a un autre signe moins quand on rétablit les bornes dans le sens de départ. On ne refera pas ce calcul lors des prochains changements de variable. Par conséquent

$$\boxed{u * v = v * u}$$

II.B.3 Remplaçons f par son expression

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Le trinôme $(x-t)^2$ se développe, ce qui donne la simplification

$$(f * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(t^2+x^2-2tx+t^2\right)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$

après quoi le changement de variable $t' = (t - x/2)\sqrt{2}$ nous ramène à l'intégrale de la fonction f :

$$(f * f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t'^2}{2}}\,\mathrm{d}t'\right)e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Par conséquent,
$$\boxed{(f * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

II.B.4 Commençons par montrer que la fonction $u * v$ est continue en appliquant le théorème de continuité sous le signe somme. Notons

$$g\colon \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto u(t)v(x-t)\end{array}\right.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto g(x,t)$ est continue car u et v le sont.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ est continue donc en particulier continue par morceaux.
- Posons

$$\varphi\colon \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{\sqrt{2\pi}}f(\lambda t)\end{array}\right.$$

Cette fonction est intégrable puisque f l'est. D'après la majoration (**1**) obtenue à la question II.B.1, et en remarquant que f est majorée par $1/\sqrt{2\pi}$,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad |g(t,x)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v) f(\lambda t) f(\lambda(x-t)) \leqslant \varphi(t)$$

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une majoration de $|u * v|$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Réutilisons la majoration (**1**) comme ci-dessus

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |u(t)v(x-t)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v) f(\lambda t) f(\lambda(x-t))$$

Intégrons l'expression précédente selon t

$$|(u*v)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |u(t)v(x-t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v) \int_{\mathbb{R}} f(\lambda t) f(\lambda(x-t)) \, \mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $t' = \lambda t$ ($\lambda \neq 0$)

$$|(u*v)(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(t') f(\lambda x - t') \, \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{\lambda} (f*f)(\lambda x)$$

Or, d'après le résultat de la question précédente,

$$(f*f)(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}\right)$$

Donc, si l'on pose

$$\mathrm{M}(u*v) = \frac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{\lambda\sqrt{2}} \qquad \text{puis} \qquad \lambda_{u*v} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

la fonction $u * v$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |(u*v)(x)| \leqslant \mathrm{M}(u*v) f(\lambda_{u*v} x)$$

Conclusion : $\boxed{u * v \in \mathrm{E}}$

II.C.1 Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction u appartient à E, donc

$$|e^{-tx} u(x)| \leqslant \mathrm{M}(u) e^{-tx} f(\lambda x)$$

Or, nous avons montré lors de la réponse à la question I.B que l'intégrale de la fonction $x \longmapsto e^{-tx} f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est convergente. Donc la fonction $x \longmapsto e^{-(t/\lambda)\lambda x} f(\lambda x)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le terme de gauche de l'inégalité est dès lors intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\widehat{u} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

II.C.2 Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme. Pour la variable t, plaçons nous sur un compact de la forme $[-a\,;a]$, avec $a > 0$ fixé. Notons

$$g \colon \begin{cases} \mathbb{R} \times [-a\,;a] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,t) \qquad \longmapsto e^{-tx} u(x) \end{cases}$$