$\boxed{7}$ On étudie ici les électrons qui ne sont pas au voisinage immédiat de la cathode et qui ont un mouvement circulaire d'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω_B. Un électron est soumis à :

- la force de Lorentz : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -e\,(\overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}) = -e\left(-\dfrac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} + r\,\mathrm{B}_0\,\omega_\mathrm{B}\right)\overrightarrow{e_r}$, puisque les électrons ont un mouvement circulaire ($\dot{r} = 0$) de vitesse angulaire ω_B ;
- son poids : $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g}$, négligeable par rapport à $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

Par ailleurs, en coordonnées polaires, l'accélération d'un électron animé d'un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse angulaire ω_B s'écrit

$$\overrightarrow{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} = -r\,{\omega_\mathrm{B}}^2\,\overrightarrow{e_r}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron de masse m dans le référentiel galiléen d'étude, en projection sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_r}$, on a

$$-m\,r\,{\omega_\mathrm{B}}^2 = e\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} - e\,r\,\mathrm{B}_0\,\omega_\mathrm{B}$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} = \omega_\mathrm{B}\left(\mathrm{B}_0 - \frac{m\,\omega_\mathrm{B}}{e}\right) r = \alpha\,r$$

et

$$\mathrm{V}(r) = \frac{\alpha}{2}\,r^2 + \beta$$

Cette expression de $\mathrm{V}(r)$ ne correspond pas au potentiel en $\ln(r/a)$ obtenu à la question 1 dans l'hypothèse d'un espace inter-électrodes vide.

$$\boxed{\text{Le mode de Brillouin est incompatible avec l'hypothèse d'un espace inter-électrodes vide.}}$$

On a vu à la question 1 que, V ne dépendant que de r, on pouvait écrire

$$\Delta\mathrm{V} = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}\right)$$

En reprenant l'expression précédente du potentiel, on peut ainsi aisément retrouver l'expression de $\Delta\mathrm{V}$. On a alors $\Delta\mathrm{V} = \alpha$ et on peut arbitrairement poser $\alpha = -\rho/\varepsilon_0$. On obtient alors

$$\Delta\mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\text{La prise en compte d'une densité volumique de charge dans l'espace inter-électrodes peut permettre d'obtenir un mode de Brillouin.}}$$

> On a posé $\alpha = -\rho/\varepsilon_0$ pour retrouver l'équation de Maxwell
>
> $$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
>
> En effet, comme $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon_0$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$, on obtient facilement
>
> $$\mathrm{div}\,(-\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
>
> et en reconnaissant l'opérateur laplacien Δ, il vient
>
> $$\Delta\mathrm{V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$