

2.1.b Par définition,
$$\varepsilon_0 = \oint_{\text{MNPQ}} \vec{v}_{c0} \wedge \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell}$$

Or,
$$\vec{v}_{c0} \wedge \vec{B}_0 = B_m (v_0 - v_c) \cos\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \vec{u}_y$$

soit
$$\vec{v}_{c0} \wedge \vec{B}_0 = B_m g_c v_0 \cos\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \vec{u}_y$$

Lorsque l'on intègre le long des faces parallèles à (Ox) , $d\vec{\ell}$ est colinéaire à \vec{u}_x . Comme \vec{u}_x et \vec{u}_y sont orthogonaux, cette intégrale est nulle. Seule l'intégrale le long des faces parallèles à (Oy) contribue à ε_0 . En outre, le long de MN, $d\vec{\ell} = dy \vec{u}_y$ tandis que le long de PQ, $d\vec{\ell} = -dy \vec{u}_y$. Ainsi, en tenant compte de ce changement de signe, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int_{-a/2}^{a/2} B_m g_c v_0 \cos\left(\frac{\omega x_M}{v_0}\right) dy - \int_{-a/2}^{a/2} B_m g_c v_0 \cos\left(\frac{\omega x_P}{v_0}\right) dy \\ &= B_m g_c v_0 a \left\{ \cos\left(\omega g_c t - \frac{\omega b}{2v_0}\right) - \cos\left(\omega g_c t + \frac{\omega b}{2v_0}\right) \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon_0 = 2 a B_m v_0 g_c \sin\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \sin(\omega g_c t)$$

en utilisant la formule trigonométrique (1).

2.1.c En utilisant les données de l'énoncé, on trouve

$$g_c = 0,03 \quad \text{et} \quad \varepsilon_0^{\max} = 0,65 \text{ V}$$

2.2.a Pour un circuit filiforme, fermé et immobile, la loi de Faraday s'écrit

$$\varepsilon_c(t) = -\frac{d\Phi_c(t)}{dt}$$

où $\Phi_c(t)$ représente le flux instantané du champ \vec{B} à travers le circuit.

2.2.b Dans \mathcal{R}_c , on a

$$x_M = \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad x_P = -\frac{b}{2}$$

2.2.c Par définition,

$$\Phi_c = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Calculons
$$\begin{aligned} \Phi_c(t) &= \int_{-b/2}^{b/2} dx_c \int_{-a/2}^{a/2} dy_c B_m \cos\left[\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right] \\ &= \frac{a v_0 B_m}{\omega} \left\{ -\sin\left[\omega g_c t - \frac{\omega b}{2v_0}\right] + \sin\left[\omega g_c t + \frac{\omega b}{2v_0}\right] \right\} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de trigonométrie (2), on a

$$\Phi_c(t) = \frac{2a v_0 B_m}{\omega} \sin\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \cos(\omega g_c t)$$

L'intégration est menée sur la surface s'appuyant sur le circuit et orientée dans le sens positif du courant. Ainsi, dans le cas qui nous intéresse, $d\vec{S}$ est orientée par \vec{u}_z .

2.2.d En utilisant la loi de Faraday, on aboutit à

$$\varepsilon_c = 2 a B_m v_0 g_c \sin\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \sin(\omega g_c t)$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 2.1.b.

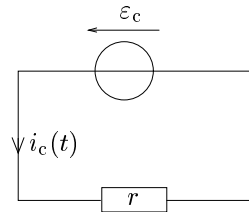
2.2.e La f.e.m. est indépendante du référentiel galiléen dans lequel on se place. Ceci est dû au fait que les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Ces notions d'invariance sont très importantes : elles ont permis le développement de la théorie de la relativité restreinte, qui postule l'invariance des lois physiques par changement de référentiel en appliquant la transformation de Lorentz, puis de la théorie de la relativité générale, où une loi physique conserve la même forme *dans n'importe quel référentiel*.

3. Courant et puissance dissipée dans le cadre

3.1 Voici ci-contre le circuit électrique équivalent au cadre. Écrivons-y la loi d'Ohm :

$$\varepsilon_c = r i_c$$



Il en découle

$$i_c(t) = \frac{2a B_m v_0 g_c}{r} \sin\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \sin(\omega g_c t)$$

3.2 Calculons la valeur moyenne de la puissance de $i_c(t)$ et de $\varepsilon_c(t)$ sur une période T

$$\begin{aligned} P_J &= \langle i_c(t) \varepsilon_c(t) \rangle_T \\ &= \left\langle \frac{4(a B_m v_0 g_c)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \sin^2(\omega g_c t) \right\rangle_T \\ P_J &= \frac{4(a B_m v_0 g_c)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \langle \sin^2(\omega g_c t) \rangle_T \end{aligned}$$

Comme la moyenne d'un sinus carré sur sa période vaut $1/2$, on obtient finalement

$$P_J = \frac{2(a B_m v_0 g_c)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)$$

On vérifie que P_J est toujours une grandeur positive ; c'est la puissance moyenne dissipée dans le circuit par effet Joule. Elle est responsable de l'échauffement du cadre (équivalent à une résistance r).

3.3 On calcule

$$i_c^{\max} = 2,6 \text{ A} \quad \text{et} \quad P_J = 0,84 \text{ W}$$

4. Force de Laplace

4.1 Rappelons la définition de la force de Laplace. La force volumique qui s'exerce sur un volume $d\tau$, parcouru par une densité volumique de courant \vec{j} et placé dans un champ magnétique \vec{B} , s'écrit

$$d\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

Dans le cas d'un circuit filiforme, on intègre cette relation sur la section du fil. La force qui s'exerce sur un élément de longueur du circuit $d\vec{\ell}$, orienté par i , s'écrit

$$d\vec{f}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Comme une force est indépendante du référentiel galiléen dans lequel on la calcule, on choisit d'évaluer la résultante des forces de Laplace sur le circuit dans le référentiel \mathcal{R}_c . On intègre $d\vec{f}_L$ sur le contour du cadre MNPQ. Comme l'intégrande ne dépend pas de y_c , les intégrales le long des faces parallèles à (Ox_c) se compensent. On calcule alors

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= \oint_{\text{MNPQ}} d\vec{f}_L \\ &= \int_{\text{PQ}} d\vec{f}_L \left(-\frac{b}{2}\right) + \int_{\text{QM}} d\vec{f}_L(x_c) + \int_{\text{MN}} d\vec{f}_L\left(\frac{b}{2}\right) + \int_{\text{NP}} d\vec{f}_L(x_c) \\ &= i_c(t) B_m \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} \cos \left[\omega \left(g_c t - \frac{b}{2v_0} \right) \right] dy_c + \int_{a/2}^{-a/2} \cos \left[\omega \left(g_c t + \frac{b}{2v_0} \right) \right] dy_c \right\} \vec{u}_x \\ \vec{f}_L &= \frac{2(a B_m)^2 v_0 g_c}{r} \sin \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \sin(\omega g_c t) \\ &\quad \times \left(\cos \left[\omega \left(g_c t - \frac{b}{2v_0} \right) \right] - \cos \left[\omega \left(g_c t + \frac{b}{2v_0} \right) \right] \right) \vec{u}_x \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'expression de i_c calculée à la question 3.1. Grâce à la formule (1), il vient finalement,

$$\vec{f}_L = \frac{4(a B_m)^2 v_0 g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \sin^2(\omega g_c t) \vec{u}_x$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \langle \vec{f}_L \rangle_T = \left\langle \frac{4(a B_m)^2 v_0 g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \sin^2(\omega g_c t) \vec{u}_x \right\rangle_T \\ &= \frac{4(a B_m)^2 v_0 g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \langle \sin^2(\omega g_c t) \rangle_T \vec{u}_x \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{F}_L = \frac{2(a B_m)^2 v_0 g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \vec{u}_x$$

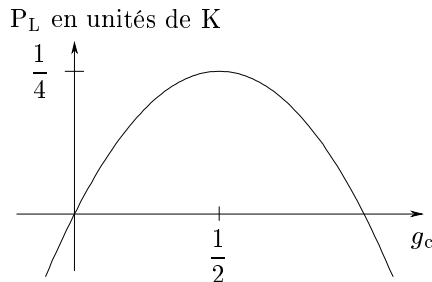
4.2 Dans le référentiel \mathcal{R} , le cadre se déplace à la vitesse \vec{v}_c . La puissance instantanée de la force de Laplace s'écrit donc

$$p_L = \vec{f}_L \cdot \vec{v}_c = \frac{4(a B_m)^2 v_0 v_c g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right) \sin^2(\omega g_c t)$$

Ainsi,

$$P_L = \langle p_L \rangle_T = \frac{2(a B_m)^2 v_0 v_c g_c}{r} \sin^2 \left(\frac{\omega b}{2v_0} \right)$$

On cherche à représenter P_L en fonction de g_c . Physiquement, on fixe la vitesse de glissement v_0 des champs et on cherche à maximiser P_L en jouant sur v_c . Il ne faut pas oublier que si g_c varie, alors v_c varie aussi, puisque $v_c = v_0(1 - g_c)$. En tenant compte de cette remarque,



$$P_L = \frac{2(a B_m v_0)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) g_c(1 - g_c) = K g_c(1 - g_c)$$

où K est une constante positive. La courbe passe par un maximum pour $g_c = 1/2$.

4.3 Application numérique :

$$P_L = 27 \text{ W} \quad \text{et} \quad \|\vec{F}_L\| = 0,47 \text{ N}$$

5. Bilan électromécanique

5.1 Dans \mathcal{R}_0 ,
$$P_{L0} = \langle \vec{f}_L \cdot \vec{v}_{c0} \rangle_T$$

Comme $\vec{v}_{c0} = \vec{v}_c - \vec{v}_0 = -v_0 g_c \vec{u}_x$, on substitue $-v_0 g_c$ à v_c dans la formule de la question 4.2 pour aboutir à

$$P_{L0} = -\frac{2(a B_m v_0 g_c)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right)$$

d'où $P_{L0} = -P_J$. Dans \mathcal{R}_0 , la force de Laplace est une force qui s'oppose au mouvement du cadre car celui-ci entraîne l'apparition de courants induits. C'est une illustration de la loi de modération de Lenz.

5.2 Dans \mathcal{R} ,
$$P_L = \frac{v_c}{v_0 g_c} \left[\frac{2(a B_m v_0 g_c)^2}{r} \sin^2\left(\frac{\omega b}{2v_0}\right) \right]$$

$$P_L = \frac{1 - g_c}{g_c} P_J$$

Sachant que $P_{em} + P_L + P_J = 0$, on a

$$P_{em} = -\frac{P_J}{g_c}$$

5.3 Le fonctionnement est :

- générateur lorsque le cadre fournit de la puissance électromagnétique au champ (c'est le cas lorsque P_{em} est positif) ;
- moteur lorsque le cadre est accéléré : ce dernier reçoit alors de la puissance mécanique (P_L est positif) ;

E_1 est l'éclairement dans le plan π lorsque le miroir 2 est occulté. $\widehat{E}(\tau)$ est le spectre de Fourier de la source. Il s'exprime en W.m^{-2} , il contient l'information sur la cohérence spatiale de la source et permet de remonter au spectre $E(\nu)$ par la transformée de Fourier inverse :

$$E(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{E}(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau$$

II.3 On part de la relation établie à la question précédente et appliquée au point F_2 :

$$E(F_2) = 2E_1 + 2\widehat{E}(\tau_0)$$

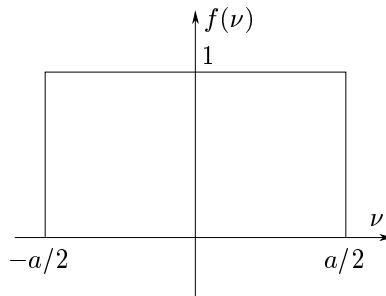
Alors

$$\widehat{E}(\tau_0) = \frac{E(F_2) - E_1}{2}$$

À partir des mesures effectuées, on peut accéder à la transformée de Fourier du spectre puis au spectre lui-même. Il s'agit bien d'un spectromètre.

III. Pouvoir de résolution

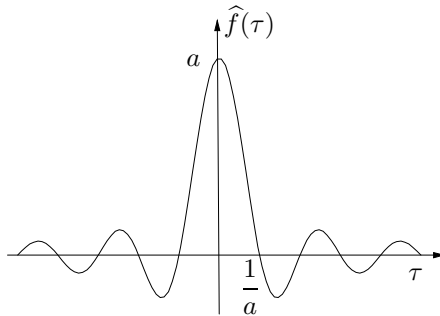
III.1.a Visualisons la fonction $\text{rect}\left(\frac{\nu}{a}\right)$:



puis calculons la fonction $\widehat{f}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\nu}{a}\right) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu \\ &= \int_{-a/2}^{+a/2} \cos(2\pi\nu\tau) d\nu \\ &= \frac{\sin(a\pi\tau)}{\pi\tau} \end{aligned}$$

$$\widehat{f}(\tau) = a \text{sinc}(a\pi\tau)$$



On vérifie que $\widehat{f}(\tau)$ s'annule pour la première fois en

$$\tau = \frac{1}{a}$$

La fonction sinus cardinal $f(x) = \sin x/x$ est continue en zéro. Ainsi, $\widehat{f}(\tau)$ admet a comme limite quand τ tends vers zéro.

III.1.b On obtient

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{a}\right) \cos(2\pi\nu\tau) \, d\nu \\ &= \int_{\nu_0 - \frac{a}{2}}^{\nu_0 + \frac{a}{2}} \cos(2\pi\nu\tau) \, d\nu \\ \widehat{f}_1(\tau) &= \frac{1}{2\pi\tau} \left\{ \sin\left[2\pi\tau\left(\nu_0 + \frac{a}{2}\right)\right] - \sin\left[2\pi\tau\left(\nu_0 - \frac{a}{2}\right)\right] \right\}\end{aligned}$$

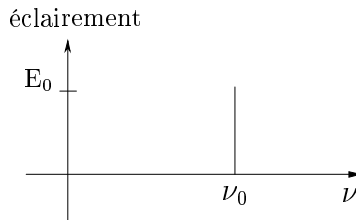
L'utilisation de la formule de trigonométrie (2) permet de conclure :

$$\widehat{f}_1(\tau) = a \text{sinc}(a\pi\tau) \cos(2\pi\tau\nu_0)$$

L'enveloppe de la fonction $\widehat{f}_1(\tau)$ est la partie en cosinus. Elle s'annule pour la première fois en

$$\tau = \frac{1}{4\nu_0}$$

III.2.a Comme c'est une source monochromatique, il n'y a qu'un pic centré en ν_0 .

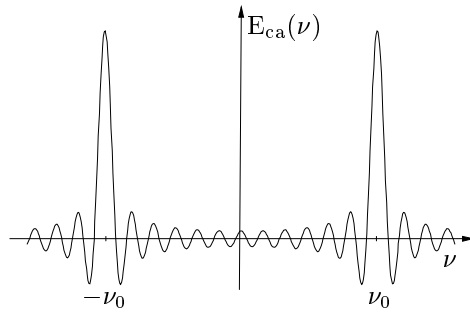


Il y a une petite erreur dans l'énoncé : il faut lire $E_{\text{th}}(\nu_0) = E_0$ et non $E_{\text{th}}(\nu) = E_0$.

III.2.b On a

$$\begin{aligned}E_{\text{ca}}(\nu) &= \int_{-\Delta_m/c}^{+\Delta_m/c} E_0 \cos(2\pi\nu_0\tau_0) \cos(2\pi\nu\tau_0) \, d\tau_0 \\ &= \int_{-\Delta_m/c}^{+\Delta_m/c} \frac{E_0}{2} (\cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau_0] + \cos[2\pi(\nu + \nu_0)\tau_0]) \, d\tau_0 \\ &= E_0 \frac{1}{2\pi(\nu - \nu_0)} \sin\left[\frac{2\pi\Delta_m(\nu - \nu_0)}{c}\right] \\ &\quad + E_0 \frac{1}{2\pi(\nu + \nu_0)} \sin\left[\frac{2\pi\Delta_m(\nu + \nu_0)}{c}\right] \\ E_{\text{ca}}(\nu) &= E_0 \frac{\Delta_m}{c} \left(\text{sinc}\left(\frac{2\pi\Delta_m(\nu - \nu_0)}{c}\right) + \text{sinc}\left(\frac{2\pi\Delta_m(\nu + \nu_0)}{c}\right) \right)\end{aligned}$$

$E_{\text{ca}}(\nu)$ est donc la somme de deux sinus cardinaux.



Montrons à présent qu'avec une très bonne approximation, on peut négliger dans l'expression de $E_{ca}(\nu)$ le sinus cardinal centré en $-\nu_0$. Comme on réalise des interférences en lumière visible,

$$\Delta_m \sim 1 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \lambda \sim 1 \mu\text{m}$$

donc

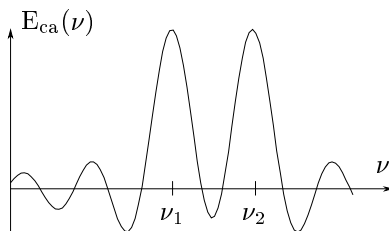
$$\frac{\Delta_m \nu_0}{c} = \frac{\Delta_m}{\lambda} \gg 1$$

Ainsi, l'amplitude du sinus cardinal centré en $-\nu_0$ est négligeable lorsqu'on se place en $\nu > 0$ et on en déduit

$$E_{ca}(\nu) = E_0 \frac{\Delta_m}{c} \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi \Delta_m (\nu - \nu_0)}{c} \right) \quad \text{d'où} \quad \Delta\nu_0 = \frac{c}{2\Delta_m}$$

III.2.c Par analogie avec le calcul précédent, on peut ajouter les éclaircements puisque les sources sont incohérentes (de fréquences différentes) et on aboutit à

$$E_{ca}(\nu) = E_0 \frac{\Delta_m}{c} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi \Delta_m (\nu - \nu_1)}{c} \right) + \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi \Delta_m (\nu - \nu_2)}{c} \right) \right)$$



Le critère proposé par l'énoncé est le critère de Rayleigh de séparabilité de deux fréquences. Le plus petit écart qui peut être détecté est l'écart $\Delta\nu_0$ calculé à la question précédente. On numérote les fréquences de telle sorte que $\nu_1 < \nu_2$. Comme elles sont très proches de ν_0 , on a par différentiation logarithmique (le résultat étant vrai en valeur absolue) :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

d'où, comme $R_a = \frac{\nu}{\Delta\nu}$,

$$R_a = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Or,
$$\Delta_m = \frac{c}{2\Delta\nu_0} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

et, comme $i = 0$,
$$2e = \Delta_m$$

car il faut prendre en compte l'aller et le retour du rayon. On a donc

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\Delta_m}{\lambda}$$

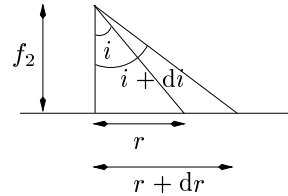
soit
$$\boxed{R_a = \frac{2\nu_0\Delta_m}{c} \quad \text{et} \quad e = \frac{\Delta_m}{2}}$$

Application numérique :

$$\boxed{\Delta_m = 3,0 \text{ mm} \quad \text{et} \quad e = 1,5 \text{ mm}}$$

III.3.a On a $dS' = 2\pi r dr$; sachant que $i = r/f_2$, on aboutit à

$$\boxed{dS' = 2\pi f_2^2 i di}$$



III.3.b Comme à la question II.2.b, on a la relation

$$\frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi\nu\tau = 2\pi\nu\tau_0 \cos i \quad \text{où} \quad \tau_0 = \frac{2e}{c}$$

On peut réécrire

$$\begin{aligned} P_{\text{re}}(\tau_0) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{i_0} 2\text{KP}(\nu) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) \right] d\nu dS' \\ &= \int_0^{+\infty} 2\text{KP}(\nu) 2\pi f_2^2 \int_0^{i_0} [1 + \cos(2\pi\nu\tau_0 \cos i)] i di d\nu \end{aligned}$$

Posons alors
$$I_1(\nu) = \int_0^{i_0} [1 + \cos(2\pi\tau_0\nu \cos i)] i di$$

ce qui permet d'identifier K' :
$$\boxed{K' = 4K\pi f_2^2}$$

Utilisons ensuite l'approximation $\cos i = 1 - i^2/2$ dans $I_1(\nu)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1(\nu) &= \int_0^{i_0} \left\{ 1 + \cos\left(2\pi\tau_0\nu \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)\right) \right\} i di \\ &= \frac{i_0^2}{2} + \left[-\frac{1}{2\pi\nu\tau_0} \sin\left(2\pi\nu\tau_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)\right) \right]_{i=0}^{i=i_0} \end{aligned}$$

ce qui permet d'aboutir, en utilisant la relation trigonométrique (2),

$$I_1(\nu) = \frac{i_0^2}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{2\pi\nu\tau_0 \frac{i_0^2}{2}} \sin\left(\pi\nu\tau_0 \frac{i_0^2}{2}\right) \cos\left[2\pi\nu\tau_0 \left(1 - \frac{i_0^2}{4}\right)\right] \right\}$$

$$\boxed{I_1(\nu) = \frac{i_0^2}{2} \left\{ 1 + \text{sinc}\left(\pi\nu\tau_0 \frac{i_0^2}{2}\right) \cos\left[2\pi\nu\tau_0 \left(1 - \frac{i_0^2}{4}\right)\right] \right\}}$$