I.2.c Le maximum de la courbe représente la **résonance** : celle-ci n'a lieu que lorsque **l'amortissement est faible**, c'est-à-dire pour $\lambda < \omega_0/\sqrt{2}$.

La pulsation $\omega = 7$ rad.s^{-1} correspond à $u = \omega/\omega_0 = 1{,}49$. En reportant sur la courbe, on lit $y = 1{,}5$ donc

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{X}_0}{y} = 13 \text{ cm}}$$

I.2.d La puissance dissipée par les frottements est l'opposée de la puissance reçue et est donc égale à

$$\mathcal{P} = \beta\,\overrightarrow{v_\mathrm{g}} \cdot \overrightarrow{v_\mathrm{g}} = \beta\,\dot{x}^2$$

En régime permanent, on a $x(t) = \mathrm{X}_0 \cos(\omega t - \phi)$, donc $\dot{x} = -\omega\,\mathrm{X}_0 \sin(\omega t - \phi)$. En remarquant que la valeur moyenne de $\sin^2$ vaut $1/2$, il vient

$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \beta\,\frac{\omega^2 {\mathrm{X}_0}^2}{2} = 4{,}70 \text{ mW}}$$

II. Amélioration du dispositif

II.1.a Le mouvement étant supposé sans glissement, en notant I le point de contact entre la roue et le sol, on a $\overrightarrow{v}_{\mathrm{I}\in\mathrm{roue/R}} = \overrightarrow{v}_{\mathrm{I}\in\mathrm{sol/R}} = \overrightarrow{0}$. Or, en notant R$'$ le référentiel lié au centre de la roue en translation par rapport à R, la loi de composition des vitesses donne

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{I}\,\in\,\mathrm{roue/R}} = \overrightarrow{v}_{\mathrm{I/R'}} + \overrightarrow{v}_{\mathrm{R'/R}} = -a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$$

d'où

$$\boxed{\dot{x} = a\,\dot{\theta}}$$

> L'angle θ mesure la rotation autour de l'axe (Oy), il faut prendre soin de l'orienter conformément à l'énoncé.

II.1.b La roue possède un mouvement de rotation propre et un mouvement de translation ; son énergie cinétique totale est donc, d'après le théorème de König,

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{J}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$$

Or, $\dot{x} = a\,\dot{\theta}$ et $\mathrm{J} = \dfrac{1}{2}\,m\,a^2$, d'où

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{4}m\,a^2\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

soit

$$\boxed{\mathrm{E_c} = \frac{3}{4}\,m\,\dot{x}^2}$$

II.1.c Dans l'hypothèse du mouvement sans glissement, la roue n'est soumise qu'à des forces conservatives (poids, tension du ressort), ou qui ne travaillent pas (force de frottement de roulement au point de contact I de vitesse nulle). Son énergie mécanique est donc constante. Or, son énergie potentielle est, en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O,

$$\mathrm{E_p} = m\,g\,a + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$