Thermodynamique

A. Performances de l'installation

A.1.1 Le premier principe donne :

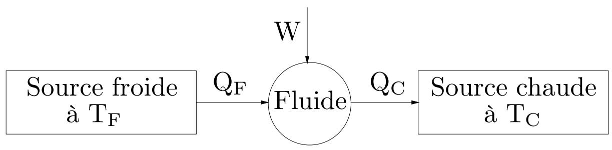
$$\boxed{\Delta U_{i\to\ f} = Q_{i\to\ f} + W_{i\ \to\ f}}$$

> Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction d'état extensive énergie E vérifiant $dE = \delta W + \delta Q$ où δW et δQ sont respectivement le travail et la chaleur reçus par le système. On rappelle qu'en thermodynamique ces variations sont définies positives quand le système reçoit de l'énergie et négatives sinon. Dans les cas où l'on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique, la relation précédente devient $dU = \delta W + \delta Q$ où U est l'énergie interne du système et est elle aussi une fonction d'état extensive.

A.1.2 L'enthalpie H est définie comme la transformation de Legendre $H = U + P\,V$. Pour une transformation isobare, elle constitue la bonne fonction d'état à utiliser : en effet, $dH = -p\ dV + \delta Q + p\,dV + V\ dp = \delta Q + V\ dp$. Par conséquent

$$\boxed{dH^{\text{isobare}} = \delta Q \quad \Longrightarrow \quad \Delta H^{\text{isobare}}_{i\to\ f} = Q_{i\to\ f}}$$

A.2.1 Au contact de la source froide, le fluide gagne de la chaleur et se réchauffe. Dans le cycle décrit par l'énoncé, le contact avec la source froide se fait lors de la transformation $E \to A$ puisqu'il s'agit justement de l'étape d'échauffement du fluide. Au contraire, le fluide donne de la chaleur et se refroidit au contact de la source chaude : ce contact avec la source chaude est donc l'étape $B \to D$ du cycle puisqu'il s'agit de l'étape de refroidissement du fluide.

> Rappelons rapidement le principe d'un réfrigérateur ditherme : il a pour but de refroidir la source froide, par conséquent le fluide reçoit de la chaleur de la source froide et en cède à la source chaude (c'est pour cela qu'un réfrigérateur ou un climatiseur se comportent comme des radiateurs pour le milieu extérieur).
>
> 
>
>
> Bilan thermodynamique d'un réfrigérateur ditherme

Comme les transformations $B \to D$ et $E \to A$ sont isobares, on obtient pour le transfert thermique à la source chaude, en utilisant la question A.1.2 :

$$Q_C = \Delta H_{B\to D}$$

soit
$$\boxed{Q_C = m\,(h_D - h_B)}$$

De même, on obtient pour le transfert thermique à la source froide :

$$Q_F = m\,(h_A - h_E)$$

Toutefois l'énoncé ne donne pas h_E. On le détermine en fonction des données du problème : comme l'enthalpie H est une fonction d'état du système, sa variation sur un cycle est nulle. Donc

$$\Delta H_{\text{cycle}} = 0 = \Delta H_{A \to B} + \Delta H_{B \to D} + \Delta H_{D \to E} + \Delta H_{E \to A}$$

Or la transformation D → E est isenthalpique d'après l'énoncé, par conséquent :

$$\Delta H_{E \to A} = m\,(h_A - h_E) = -\Delta H_{A \to B} - \Delta H_{B \to D} = m\,(h_A - h_D)$$

Donc $$\boxed{Q_F = m\,(h_A - h_E) = m\,(h_A - h_D) \qquad \text{et} \qquad Q_C = m\,(h_D - h_B)}$$

A.2.2 On obtient numériquement

$$\boxed{Q_F = 103{,}8\ \text{kJ}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{Q_C = -162{,}2\ \text{kJ}}$$

> On vérifie bien les signes des chaleurs obtenues : le fluide reçoit bien de la chaleur de la source froide et en cède effectivement à la source chaude, c'est-à-dire à l'extérieur.

A.3.1 U est une fonction d'état du système, sa variation sur un cycle est nulle. On obtient donc, à l'aide du premier principe :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_F + Q_C$$

d'où $$\boxed{W = -Q_F - Q_C = -m\,(h_A - h_B)}$$

A.3.2 Le travail fourni par ce moteur est

$$\boxed{W = 58{,}4\ \text{kJ}}$$

> W > 0 donc le fluide reçoit du travail par transfert mécanique (par exemple un moteur) : c'est donc cela le ronronnement qu'on peut entendre lorsqu'un réfrigérateur sort de sa torpeur...

A.4.1 En tenant compte du fait que les températures des sources sont supposées constantes (modèle de la source idéale de chaleur), les entropies transférées au cours d'un cycle sont données par :

$$S_F = \frac{Q_F}{T_F} \qquad \text{et} \qquad S_C = \frac{Q_C}{T_C}$$

donc $$\boxed{S_F = m\,\frac{h_A - h_E}{T_F} \qquad \text{et} \qquad S_C = m\,\frac{h_D - h_B}{T_C}}$$

Les deux autres étapes du cycle étant adiabatiques et réversibles, elles se font sans création d'entropie.

Cette équation s'intègre en mettant tout ce qui dépend du volume d'un côté et tout ce qui dépend de la pression de l'autre (car γ et a sont supposés constants). Finalement

$$\boxed{p\,\mathrm{V}^{\frac{\gamma-a}{1-a}} = \mathrm{C}^{\text{te}}}$$

Une évolution polytropique vérifie donc bien une loi analogue à la loi de Laplace.

> Cette démonstration pour l'évolution polytropique est complètement analogue à la démonstration des lois de Laplace.

B.2.3 On obtient bien une expression de la forme recherchée avec

$$\boxed{k = \frac{\gamma - a}{1 - a}}$$

> On vérifie que dans la limite $a = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on se ramène à une évolution adiabatique et réversible, on obtient $k = \gamma$, ce qui est en accord avec la loi de Laplace pour un gaz parfait à $\gamma = \mathrm{C}^{\text{te}}$.

C. Détermination des conditions de fonctionnement permettant d'obtenir l'efficacité maximale

C.1 Il semble assez naturel de se dire que l'efficacité maximale sera atteinte lors d'un cycle réversible. En effet, la réversibilité du cycle induit l'absence de frottements et autres phénomènes de pertes, par définition irréversibles.

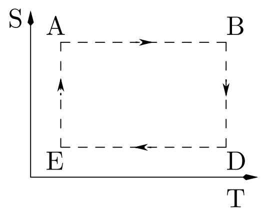
> Il est à noter qu'un cycle ne peut être réversible que si toutes ses étapes de transformation le sont.

Les étapes de vaporisation ou de détente adiabatiques et réversibles sont isentropiques. De plus, pour que l'échange de chaleur soit réversible lors d'un contact avec une source chaude ou froide, il faut que l'échange soit à température constante, donc isotherme pendant tout le temps de contact avec la source et bien sûr à la température de la source.

Les transformations subies par le fluide sont alors :

- A → B : compression adiabatique réversible donc isentropique ;
- B → D : refroidissement isotherme et liquéfaction à la température $\mathrm{T_F}$ dans le condenseur ;
- D → E : détente adiabatique réversible donc isentropique ;
- E → A : vaporisation isotherme à $\mathrm{T_C}$ dans l'évaporateur.

Ces différentes transformations sont visibles sur le diagramme (T,S) de la figure ci-contre. Le diagramme est particulièrement simple puisqu'avec deux isothermes et deux isentropiques, il est réduit à un rectangle. On reconnaît le **cycle de Carnot** récepteur.



C.2 Le cycle de Carnot vu à la question précédente est réversible. L'entropie S_p créée lors du cycle est par conséquent nulle. En utilisant la réponse à la question A.4.e, on obtient $\Delta S_C = -\Delta S_F$. L'échange de chaleur au contact des sources étant supposé isotherme, les variations d'entropie massique au contact des sources froides et chaudes sont respectivement

$$m\,\Delta S_F = \frac{Q'_F}{T_F} \qquad \text{et} \qquad m\,\Delta S_C = \frac{Q'_C}{T_C}$$

Finalement
$$\boxed{\begin{cases} Q'_C = m\,T_C\,\Delta S_C = -121{,}9 \text{ kJ} \\ Q'_F = m\,T_F\,\Delta S_F = 115{,}7 \text{ kJ} \end{cases}}$$

> On vérifie bien, comme à chaque fois, que les signes pour les chaleurs sont conformes à ce que l'on peut raisonnablement attendre d'un réfrigérateur.

C.3 À partir du lien entre les chaleurs échangées donné dans la question précédente et en utilisant la formule pour l'efficacité déterminée à la question A.5, on obtient :

$$\boxed{\mu_{\max} = \frac{1}{-1 + T_C/T_F} = 18{,}5}$$

> On vérifie que l'efficacité de ce réfrigérateur idéal, puisque basé sur un cycle réversible, est supérieure à l'efficacité calculée à la question A.5.

D. Étude de la diffusion thermique dans les parois des échangeurs

D.1 La loi de Fourier dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle selon (Ox) est :

$$\boxed{\overrightarrow{J}_Q = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x}}$$

D.2 Si l'on note u l'énergie volumique, la conservation locale de l'énergie donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}\,\overrightarrow{J}_Q = \overrightarrow{0}$$

Le régime étudié étant stationnaire, le premier terme est nul. En réinjectant l'expression de $\overrightarrow{J}_Q$ déterminée à la question précédente dans l'équation ci-dessus, on obtient une équation de Laplace :

$$\Delta T = 0$$

En utilisant les conditions aux limites $T(x = 0) = T_0$ et $T(x = e) = T_e$, on obtient

$$\boxed{T(x) = \left(\frac{T_e - T_0}{e}\right) x + T_0}$$

Le flux thermique ϕ est défini comme $\phi = \iint_\Sigma \overrightarrow{J}_Q\,d\Sigma\,\overrightarrow{e_x} = \iint_\Sigma -\lambda\,\dfrac{\partial T}{\partial x}\,d\Sigma$.

D'où
$$\boxed{\phi = \lambda\left(\frac{T_0 - T_e}{e}\right)\Sigma = \sigma\,(T_0 - T_e)}$$

> On vérifie bien que le flux de chaleur descend les gradients de température : le flux de chaleur va du plus chaud vers le plus froid.