II.2.b De même $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*_{\mathrm{C}}(\mathrm{L}) \;=\; \overrightarrow{\mathrm{CL}} \wedge m_{\mathrm{L}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*} \;+\; \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{L}}}(\mathrm{L})_{/\mathcal{R}_{\mathrm{L}}}}$

II.2.c Le moment cinétique du système Terre-Lune est la somme des moments cinétiques de la Terre et de la Lune exprimés ci-dessus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*(\mathrm{T},\mathrm{L}) &= \overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*_{\mathrm{C}}(\mathrm{T}) + \overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*_{\mathrm{C}}(\mathrm{L})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{CT}} \wedge m_{\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} \wedge m_{\mathrm{L}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*} + \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{T}}}(\mathrm{T})_{/\mathcal{R}_{\mathrm{T}}} + \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{L}}}(\mathrm{L})_{/\mathcal{R}_{\mathrm{L}}}\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la somme concernent le mouvement de la Terre et de la Lune par rapport au centre de masse C, mouvement que l'on peut qualifier d'orbital. Les deux derniers termes sont des moments cinétiques dans le référentiel de l'objet considéré. Ils ont trait à sa rotation propre, autour de ses propres pôles. Le moment cinétique du système Terre-Lune est donc composé d'une partie concernant la rotation de la Terre et de la Lune sur leur orbite et d'une partie concernant leur rotation sur elles-mêmes. On a finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*(\mathrm{T},\mathrm{L}) = \overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*_{\mathrm{orb}} + \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{T}}}(\mathrm{T})_{/\mathcal{R}_{\mathrm{T}}} + \overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{L}}}(\mathrm{L})_{/\mathcal{R}_{\mathrm{L}}}\\[2ex] \text{avec}\quad \overrightarrow{\mathrm{L}}{}^*_{\mathrm{orb}} = \overrightarrow{\mathrm{CT}} \wedge m_{\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} \wedge m_{\mathrm{L}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*}\end{array}}$$

II.3.a D'après la définition de C comme centre de masse du système Terre-Lune,

$$m_{\mathrm{L}}\overrightarrow{\mathrm{CL}} + m_{\mathrm{T}}\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \overrightarrow{0}$$

$$m_{\mathrm{L}}\overrightarrow{\mathrm{CT}} + m_{\mathrm{L}}\overrightarrow{\mathrm{TL}} + m_{\mathrm{T}}\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \overrightarrow{0}$$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CT}} = -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\overrightarrow{\mathrm{TL}}}$$

De même, $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CL}} = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\overrightarrow{\mathrm{TL}}}$$

Les vitesses demandées s'obtiennent par dérivation des vecteurs ci-dessus par rapport au temps :

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CT}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{TL}}}{\mathrm{d}t}$$

On sait par définition que $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{TL}}$. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} = -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}$$

Or, $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}$$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} = -\frac{m_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}}$$

De même, $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CL}}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{L}}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}}$$

II.3.b Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, la Terre n'est soumise qu'à la force gravitationnelle due à la Lune. Inversement, la Lune n'est soumise qu'à la force gravitationnelle due à la Terre. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc, appliquée à ces deux astres :

$$m_\mathrm{T}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = m_\mathrm{T}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{L}}(\mathrm{T})$$

$$m_\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = m_\mathrm{L}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{T}}(\mathrm{L})$$

Dans cette deuxième expression on peut, d'après la question précédente, substituer $\dfrac{m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{T}+m_\mathrm{L}}\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}$ à $\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*}$. On obtient

$$\frac{m_\mathrm{L}\,m_\mathrm{T}}{m_\mathrm{T}+m_\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = m_\mathrm{L}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{T}}(\mathrm{L})$$

soit

$$\boxed{\mu\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = m_\mathrm{L}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{T}}(\mathrm{L})}$$

Le deuxième terme de cette égalité est la force exercée par la Terre sur la Lune. Tout se passe donc comme si on avait une particule fictive de masse μ soumise à cette force.

> On aurait évidemment obtenu le même résultat en partant de l'application du principe fondamental de la dynamique à la Terre et en considérant que, en vertu du principe de l'action et de la réaction, $m_\mathrm{T}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{L}}(\mathrm{T}) = -m_\mathrm{L}\overrightarrow{\mathrm{G}_\mathrm{T}}(\mathrm{L})$.

II.4.a On repart de l'expression obtenue à la question II.2.c et on utilise les relations obtenues en II.3.a sur les vitesses :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb} &= \overrightarrow{\mathrm{CT}}\wedge m_\mathrm{T}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{T}/\mathcal{R}^*} + \overrightarrow{\mathrm{CL}}\wedge m_\mathrm{L}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}/\mathcal{R}^*}\\
&= \overrightarrow{\mathrm{CT}}\wedge(-\mu\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}) + \overrightarrow{\mathrm{CL}}\wedge(\mu\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*})\\
\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb} &= \mu\,\overrightarrow{\mathrm{TL}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb} = \mu\,\overrightarrow{\mathrm{CM}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}}$$

Pour montrer que le mouvement de la particule fictive est plan, on peut montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb}$ se conserve. On a déjà montré dans la première partie que $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*(\mathrm{T},\mathrm{L})$, $\overrightarrow{\mathrm{L}_\mathrm{T}}(\mathrm{T})$ et $\overrightarrow{\mathrm{L}_\mathrm{L}}(\mathrm{L})$ se conservent. Donc le moment cinétique orbital $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb} = \overrightarrow{\mathrm{L}}^*(\mathrm{T},\mathrm{L}) - \overrightarrow{\mathrm{L}_\mathrm{T}}(\mathrm{T}) - \overrightarrow{\mathrm{L}_\mathrm{L}}(\mathrm{L})$ se conserve aussi. En particulier, la direction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb}$ reste constante au cours du temps. Or, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb}$ puisqu'il en est le produit vectoriel. $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}^*}$ se trouvent donc tous les deux dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb}$. Par conséquent, le point M se trouve toujours dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{L}}^*_\mathrm{orb}$ contenant C. Le mouvement de la particule fictive est donc plan.

II.4.b Si $m_{\rm T} \gg m_{\rm L}$,

$$\overrightarrow{\rm CL} = \frac{m_{\rm T}}{m_{\rm T}+m_{\rm L}}\overrightarrow{\rm TL} \simeq \frac{m_{\rm T}}{m_{\rm T}}\overrightarrow{\rm TL} = \overrightarrow{\rm TL}$$

Le point C est alors confondu avec le point T, c'est-à-dire que le barycentre du système Terre-Lune est le centre de la Terre, qui concentre presque toute la masse.

On a en outre $\overrightarrow{\rm CM} = \overrightarrow{\rm TL}$ par définition de M et $\overrightarrow{\rm CM} = \overrightarrow{\rm TM}$ puisque C = T, de sorte que M = L. Le point M, position de la particule fictive, est confondu avec le point L, la position de la Lune.

Le référentiel $\mathcal{R}^*$ est un référentiel lié à C = T et d'axes $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, donc il s'identifie à $\mathcal{R}_{\rm T}$, le référentiel géocentrique.

II.5.a

> On cherche une équation de trajectoire. La façon habituelle de procéder est d'utiliser le principe fondamental de la dynamique puis d'éliminer le temps. Le changement de variable $u(\theta) = 1/r(\theta)$ aide à intégrer l'équation différentielle : il ne doit pas être introduit dès le début.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la Lune dans le référentiel $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_{\rm T}$, qui est galiléen puisque le système Terre-Lune est isolé. La Lune subit seulement la force gravitationnelle due à la Terre :

$$\frac{{\rm d}^2\overrightarrow{\rm TL}}{{\rm d}t^2} = -\mathcal{G}\,\frac{m_{\rm T}}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Calculons la dérivée seconde de $\overrightarrow{\rm TL}$ par rapport au temps. Avec $\overrightarrow{\rm TL} = r\,\overrightarrow{e_r}$,

$$\frac{{\rm d}\overrightarrow{\rm TL}}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\,\overrightarrow{e_r} + r\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

donc
$$\frac{{\rm d}^2\overrightarrow{\rm TL}}{{\rm d}t^2} = \frac{{\rm d}^2r}{{\rm d}t^2}\,\overrightarrow{e_r} + 2\,\frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\cdot\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\frac{{\rm d}^2\theta}{{\rm d}t^2}\,\overrightarrow{e_\theta} - r\left(\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\right)^2\overrightarrow{e_r}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc, projeté sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$:

$$\begin{cases} \dfrac{{\rm d}^2r}{{\rm d}t^2} - r\left(\dfrac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\right)^2 = -\mathcal{G}\dfrac{m_{\rm T}}{r^2} \\[2ex] 2\,\dfrac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\cdot\dfrac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t} + r\dfrac{{\rm d}^2\theta}{{\rm d}t^2} = 0 \end{cases}$$

On doit maintenant éliminer le temps. Pour cela, on sait que le moment cinétique $\overrightarrow{\rm L}^*_{\rm orb}$ se conserve, ce qui va donner une relation entre r^2 et ${\rm d}\theta/{\rm d}t$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\rm L}^*_{\rm orb} &= \overrightarrow{\rm TL} \wedge m_{\rm L}\,\overrightarrow{\rm V}_{{\rm L}/\mathcal{R}_{\rm T}} \\ &= r\,\overrightarrow{e_r} \wedge m_{\rm L}\left(\frac{{\rm d}r}{{\rm d}t}\overrightarrow{e_r} + r\,\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\,\overrightarrow{e_\theta}\right) \\ \overrightarrow{\rm L}^*_{\rm orb} &= r^2\,\frac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t}\,m_{\rm L}\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{se conserve} \end{aligned}$$

Donc $r^2{\rm d}\theta/{\rm d}t$ est une constante, que l'on appelle C. La première relation du principe fondamental de la dynamique s'écrit donc :

$$\frac{{\rm d}^2r}{{\rm d}t^2} - r\left(\frac{\rm C}{r^2}\right)^2 = -\mathcal{G}\,\frac{m_{\rm T}}{r^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{{\rm d}^2r}{{\rm d}t^2} - \frac{{\rm C}^2}{r^3} = -\mathcal{G}\,\frac{m_{\rm T}}{r^2}$$

> Il n'est pas nécessaire de passer par la conservation du moment cinétique orbital $\overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}}$ pour avoir la relation $r^2\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \mathrm{C}$. On peut l'obtenir en multipliant par r la deuxième relation issue du principe fondamental de la dynamique et en intégrant par rapport au temps. Notons toutefois que la méthode utilisée permet de relier C (appelée *constante des aires*) à $\overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}}$, comme il est demandé plus tard dans le sujet, ce qui ne serait pas possible autrement.

Calculons $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ en utilisant le changement de variable proposé par l'énoncé :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{C}}{r^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{C}$$

puis
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{C}\right) = -\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\\ &= -\frac{\mathrm{C}^2}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -\mathrm{C}^2\,u^2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\end{aligned}$$

L'équation tirée du principe fondamental de la dynamique devient donc

$$-\,\mathrm{C}^2\,u^2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - \mathrm{C}^2u^3 \;=\; -\,\mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}\,u^2$$

On choisit $u \neq 0$ (sinon la Lune serait infiniment éloignée de la Terre, donc l'interaction entre les deux serait nulle) et $\mathrm{C} \neq 0$ (sinon le moment cinétique orbital serait nul : il n'y aurait pas de rotation de la Lune autour de la Terre), ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u \;=\; \mathcal{G}\,\frac{m_{\mathrm{T}}}{\mathrm{C}^2}}$$

Cette équation admet une solution de la forme

$$u(\theta) \;= \mathrm{A}\,\cos(\theta+\Phi) \,+\, \mathcal{G}\,\frac{m_{\mathrm{T}}}{\mathrm{C}^2}$$

où A et Φ sont des constantes. L'origine de θ n'a pas été fixée : on peut la prendre de telle manière que Φ soit nul. On a alors $u(\theta) \;=\; \mathrm{A}\,\cos\theta \,+\, \mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}/\mathrm{C}^2$, d'où

$$r(\theta) = \frac{1}{\mathrm{A}\,\cos\theta \,+\, \mathcal{G}\,\dfrac{m_{\mathrm{T}}}{\mathrm{C}^2}} \;=\; \frac{\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}}}{1 \,+\, \mathrm{A}\,\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}}\,\cos\theta}$$

qui est bien de la forme

$$\boxed{r(\theta) \;=\; \frac{p}{1\,+\,e\,\cos\theta} \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}}\\ e &= \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\,m_{\mathrm{T}}}\end{aligned}\right.}$$

p est le paramètre de la trajectoire, qui détermine la taille de l'ellipse, et e est l'excentricité de l'ellipse, qui quantifie l'aplatissement de la trajectoire.

II.6.a D'après la question II.5.a, avec $r = \mathrm{D_L}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}} = {\mathrm{D_L}}^2\,\omega_{\mathrm{L}}\,m_{\mathrm{L}}\,\overrightarrow{e_z}$, ce qui donne

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}} &= {\mathrm{D_L}}^2\,\omega_{\mathrm{L}}\,m_{\mathrm{L}} = 2,87\,.\,10^{34}\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \\ \mathrm{L_T(T)}_{\mathcal{R}_\mathrm{T}} &= \mathrm{J_T}\,\Omega_\mathrm{T} = \frac{2}{5}\,m_\mathrm{T}\,{\mathrm{R_T}}^2\,\Omega_\mathrm{T} = 7,08\,.\,10^{33}\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \\ \mathrm{L_L(L)}_{\mathcal{R}_\mathrm{L}} &= \mathrm{J_L}\,\Omega_\mathrm{L} = \frac{2}{5}\,m_\mathrm{L}\,{\mathrm{R_L}}^2\,\Omega_\mathrm{L} = 2,39\,.\,10^{29}\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \end{aligned}\right.}$$

On constate que le moment cinétique de rotation propre de la Lune, $\mathrm{L_L(L)}$, est négligeable devant les deux autres.

II.6.b On a $\overrightarrow{\mathrm{L}^*}(\mathrm{T,L}) = \overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}} + \overrightarrow{\mathrm{L_T}}(\mathrm{T}) + \overrightarrow{\mathrm{L_L}}(\mathrm{L})$. On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{L_T}}(\mathrm{T})$ sont colinéaires. D'après la question précédente, on peut négliger $\overrightarrow{\mathrm{L_L}}(\mathrm{L})$ devant les deux autres, qu'il reste à calculer. D'une part,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}} &= {\mathrm{D_L}}^2\,\omega_\mathrm{L}\,m_\mathrm{L}\,\overrightarrow{e_z} \\ &= m_\mathrm{L}\,\sqrt{\mathcal{G}\,m_\mathrm{T}\,\mathrm{D_L}}\,\overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

et d'autre part $$\overrightarrow{\mathrm{L_T}}(\mathrm{T}) = \mathrm{J_T}\,\Omega_\mathrm{T}\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{L}^*}(\mathrm{T,L}) \simeq \overrightarrow{\mathrm{L}^*_{\mathrm{orb}}} + \overrightarrow{\mathrm{L_T}}(\mathrm{T}) = \left(m_\mathrm{L}\sqrt{\mathcal{G}\,m_\mathrm{T}\,\mathrm{D_L}} + \mathrm{J_T}\,\Omega_\mathrm{T}\right)\overrightarrow{e_z}}$$

III. Éloignement de la Lune

III.1 Calculons le volume $\mathrm{V_b}$ des bourrelets. Soit $\mathrm{V_{tot}}$ le volume délimité par l'ellipsoïde :

$$\mathrm{V_{tot}} = \frac{4}{3}\,\pi\,(\mathrm{R_T} + h)\,{\mathrm{R_T}}^2$$

et soit $\mathrm{V_{Terre}}$ le volume de la boule :

$$\mathrm{V_{Terre}} = \frac{4}{3}\,\pi {\mathrm{R_T}}^3$$

d'où $$\mathrm{V_b} = \mathrm{V_{tot}} - \mathrm{V_{Terre}} = \frac{4}{3}\pi h {\mathrm{R_T}}^2$$

La masse cherchée est donc :

$$\boxed{m_\mathrm{b} = \rho \times \mathrm{V_b} = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,h\,{\mathrm{R_T}}^2 = 8,5\,.\,10^{16}\ \mathrm{kg}}$$