La complétude de l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(\mathrm{X}, \mathrm{B})$ des applications continues et bornées d'une partie X d'un espace vectoriel normé, à valeurs dans un espace de Banach B (réel ou complexe), muni de la norme uniforme, n'est au programme qu'en filière MP*. Autrement dit, il n'y a que pour l'X et les ENS où ce théorème doit être connu (et peut être utilisé). Ici, avec $\mathrm{X} = \mathrm{J}$ et $\mathrm{B} = \mathbb{C}$, ce théorème donne immédiatement la complétude de E.

De même, si G est un espace vectoriel normé quelconque et F un espace de Banach, la complétude de $\mathcal{L}(\mathrm{G}, \mathrm{F})$ n'est au programme qu'en filière MP*. Celle-ci donne alors la complétude de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, puisque l'on a vu que E était complet.

Pour les démonstrations de ces deux résultats, ainsi que quelques énoncés donnés en complément, voir la remarque en fin de corrigé.

La convergence de la série $\sum \mathrm{A}^n$, jointe à la continuité de la loi $\circ$ par rapport à la deuxième variable, justifie le calcul suivant :

$$\begin{aligned}(\mathrm{I_E} - \mathrm{A}) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n - \mathrm{A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}^n \\ (\mathrm{I_E} - \mathrm{A}) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n &= \mathrm{I_E}\end{aligned}$$

La continuité par rapport à la première variable de la loi $\circ$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ permet de montrer de manière similaire que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n\right)(\mathrm{I_E} - \mathrm{A}) = \mathrm{I_E}$$

ce qui montre en particulier que $\mathrm{I_E} - \mathrm{A}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n$.

Il faut se convaincre que c'est bien la continuité de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$: $\mathrm{B} \mapsto \mathrm{A} \circ \mathrm{B}$ qui permet d'écrire

$$\mathrm{A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}^{n+1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{A} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}^n &= \mathrm{A} \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}^n && \text{(par définition)} \\ &= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{A} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}^n && \text{(par continuité)}\end{aligned}$$

5 L'équation intégrale (**1**) s'écrit aussi $(\mathrm{I_E} - \mathrm{A})(u) = u_0$. Or, la question précédente montre que l'élément $\mathrm{I_E} - \mathrm{A}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Ceci prouve que

$$\boxed{\text{L'équation } (\mathbf{1}) \text{ admet exactement une solution.}}$$