D'après la question III.E.2, les coefficients de Fourier de γ_{x_1} sont $c_k = |a_k|^2$. En prenant l'égalité précédente en $t = 1/2$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{4\pi^2(a+k)^2} \left|1 - e^{-2i\pi a}\right|^2 = \cos(\pi a)$$

Or $$\left|1 - e^{-2i\pi a}\right|^2 = \left|e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}\right|^2 = 4\left|\sin \pi a\right|^2$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes,

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2(a+k)^2} = \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}}$$

Les fonctions de $\mathscr{Q}$ sont souvent appelées fonctions *presque périodiques*. Elles ont été introduites par Bohr dans les années trente. Celui-ci a en particulier montré l'équivalence de la définition donnée dans l'énoncé avec la définition suivante : une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dite presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une quantité positive $\ell(\varepsilon)$ telle que chaque intervalle sur l'axe réel de longueur $\ell(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre τ pour lequel l'inégalité

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

est vraie pour tout x. Cette définition justifie le terme « presque périodique » employé. Il est facile de vérifier que toute fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ vérifie cette définition : prendre par exemple $\ell(\varepsilon) = 2\mathrm{T}$, où T est la période de f.

Dans ce problème, on a en particulier montré que $\mathscr{Q}$ est un espace vectoriel stable par produit, et l'on a prouvé l'analogue de la formule de Bessel-Parseval pour les séries de Fourier. On a également introduit un opérateur interne $x \mapsto \gamma_x$ sur $\mathscr{Q}$ et l'on a exprimé les coefficients de Fourier-Bohr de γ_x en fonction de ceux de x.