CCP Maths 1 MP 2008 — Corrigé

Indications

I. Généralités

3 Pour établir la convergence normale, calculer $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\geqslant 2} |1/n^x|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, observer que pour tout $n \geqslant 2$, $|1/n^x| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{3}$ Constatons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 2$, on a

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente et indépendante de x, il vient que

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \text{ converge normalement sur } [\,2\,;+\infty\,[.}$$

Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément vers F sur $[\,2\,;+\infty\,[$.

En outre, pour $n \geqslant 2$,
$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

De plus, le premier terme de la série de fonctions est constant, égal à 1. On en déduit que la fonction F admet une limite en $+\infty$ et que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1}$$

$\boxed{5}$

> La série définissant ζ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[\,a\,;+\infty\,[$ où $a > 1$. En particulier, pour tout $x > 1$, la série définissant $\zeta(x)$ est convergente.

Observons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, on a

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} - \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{-2}{n^x} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x) - \zeta(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2p)^x} \\ &= -2^{1-x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{F}(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x)}$$

Finalement, pour $x > 1$, on a

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)}$$

D'après la question 3, $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De plus, $1 - 2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Le fait que pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{1-x}}\mathrm{F}(x)$ assure que

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$$

> L'existence et la valeur de la limite de ζ en $+\infty$ peuvent également s'obtenir directement par un argument de convergence normale, similaire à celui utilisé pour F à la question 3.