Or, $\quad \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}+\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha - k_0\,y\,\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} + \underline{\mathrm{E}'_0}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha + k_0\,y\,\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$

Par conséquent, la condition aux limites en $y=0$ donne

$$(\mathrm{E}_0+\underline{\mathrm{E}'_0})\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)} = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de t et x, on obtient $\mathrm{E}_0+\underline{\mathrm{E}'_0}=0$, ou encore, $\underline{\mathrm{E}'_0}=-\mathrm{E}_0$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = -\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha + k_0\,y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Le champ total s'écrit alors

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}+\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha - k_0 y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} - \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha + k_0 y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}+\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_0\,y\,\sin\alpha} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,k_0\,y\sin\alpha}\right)\overrightarrow{e_z}$$

soit
$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}+\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\sin\left(k_0\,y\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} \qquad (\mathbf{1})$$

La condition aux limites en $y=b$, qui doit être vérifiée pour toute valeur de x et de t, impose donc $\sin(k_0\,b\,\sin\alpha)=0$, ou encore $k_0\,b\,\sin\alpha = p\,\pi$, avec $p\in\mathbb{Z}$. En utilisant $k_0 = 2\,\pi/\lambda_0$, on obtient

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{p\,\lambda_0}{2\,b} \qquad \text{avec} \qquad p\in\mathbb{N}^*} \qquad (\mathbf{2})$$

En effet, $p\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^*$ ne convient pas puisque $\alpha\in\,]\,0\,;\pi/2\,[$ et donc $\sin\,\alpha>0$.

I.A.2.b En reportant le résultat (**2**) dans l'équation (**1**), on trouve

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}+\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(k_0\frac{p\,\lambda_0}{2\,b}\,y\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\,\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

soit
$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(\frac{2\pi\,p\,\lambda_0\,y}{2\,b\,\lambda_0}\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

ce qui donne
$$\boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(\frac{p\,\pi\,y}{b}\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}}$$

La propagation se fait donc suivant la direction (Ox). De plus, α est choisi dans l'intervalle $]\,0\,;\pi/2\,[$, ce qui impose $k_0\cos\alpha>0$. **La propagation de l'onde se fait ainsi suivant $\overrightarrow{e_x}$.**

Le champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}$ donné par l'énoncé ainsi que le champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}}$ que l'on a trouvé à la question I.A.2.a correspondent à des ondes planes, progressives et monochromatiques qui sont des solutions des équations de Maxwell. Ces dernières étant linéaires, toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_1}}$ et $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}_2}}$, et en particulier $\overrightarrow{\underline{\mathbf{E}}}$, **est solution des équations de Maxwell.**

L'équation du champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$ donne quant à elle directement l'expression du vecteur d'onde dans le guide :

$$\boxed{k_{\mathrm{g}} = k_0\cos\alpha}$$