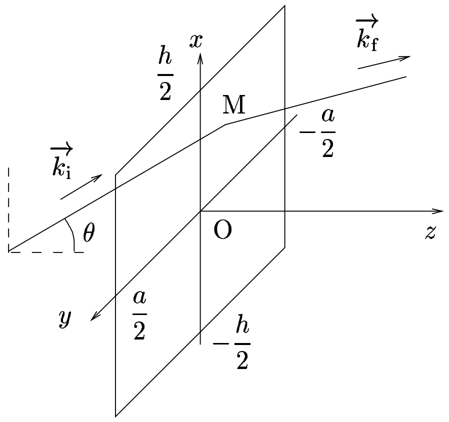
$\boxed{7}$ Utilisons le principe de Huygens pour exprimer l'amplitude de l'onde lumineuse ayant traversé la plaque.



Il s'agit d'un problème de diffraction à l'infini, avec une onde incidente de vecteur d'onde

$$\overrightarrow{k_\mathrm{i}} = k_\text{réf} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

On étudie l'amplitude dans la direction sortante $\overrightarrow{u_\mathrm{d}}$, donc avec un vecteur d'onde

$$\overrightarrow{k_\mathrm{f}} = k_\text{réf} \begin{pmatrix} \alpha_\mathrm{d} \\ \beta_\mathrm{d} \\ \gamma_\mathrm{d} \end{pmatrix}$$

L'amplitude diffractée s'écrit alors :

$$\mathrm{A}(\overrightarrow{u_\mathrm{d}}) = \mathrm{A}_\text{lec} \int_{\mathrm{M}\in\,\text{Écran}} t(x,y,0)\, e^{i(\overrightarrow{k_\mathrm{i}} - \overrightarrow{k_\mathrm{f}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

> Rappelons le sens de cette formule. Chaque point M de l'écran est équivalent à une source secondaire, et on somme sur toutes ces sources. En outre, $(\overrightarrow{k_\mathrm{i}} - \overrightarrow{k_\mathrm{f}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ représente le déphasage entre l'onde « émise » par M et celle « émise » par O.
>
> Ce terme de phase est correct à un signe près. Cela ne changera pas l'expression de l'intensité diffractée, qui est la vraie grandeur physique mesurée.

Calculons le produit scalaire

$$(\overrightarrow{k_\mathrm{i}} - \overrightarrow{k_\mathrm{f}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = k_\text{réf}\left((\sin\theta - \alpha_\mathrm{d})\times x + (-\beta_\mathrm{d})\times y + (\cos\theta - \gamma_\mathrm{d})\times 0\right)$$

En développant le coefficient $t(x,y,0)$, il faut donc calculer

$$\mathrm{A}(\overrightarrow{u_\mathrm{d}}) = \mathrm{A}_\text{lec}\, t_0 \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}y\, e^{-2\pi i \frac{\beta_\mathrm{d} y}{\lambda_\text{réf}}} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\,(1 - \gamma\,\varepsilon\,\cos(k_\text{réf}\, x\,\sin\varphi))\, e^{2\pi i x \frac{\sin\theta - \alpha_\mathrm{d}}{\lambda_\text{réf}}}$$

La première intégrale est obtenue à l'aide de la formule donnée dans l'énoncé, en faisant les changements de variables $(u \to h)$, $(x \to y)$ et $(a/\lambda \to -\beta_\mathrm{d}/\lambda_\text{réf})$:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}y\, e^{-2\pi i \beta_\mathrm{d} y/\lambda_\text{réf}} = h\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\, h\, \beta_\mathrm{d}}{\lambda_\text{réf}}\right)$$

> Ici, l'énoncé donne la valeur de l'intégrale. Il faut néanmoins faire attention aux variables utilisées dans la formule donnée. Il est nécessaire de savoir recalculer rapidement et sans aide une telle intégrale :
>
> $$\begin{aligned} \int_{-u/2}^{u/2} \mathrm{d}x \exp\left(2i\pi\frac{ax}{\lambda}\right) &= \frac{\lambda}{2i\pi a}\left[\exp\left(2i\pi\frac{ax}{\lambda}\right)\right]_{-u/2}^{u/2} \\ &= \frac{\lambda}{2i\pi a} 2i\sin\left(\frac{\pi a u}{\lambda}\right) \end{aligned}$$
>
> $$\int_{-u/2}^{u/2} \mathrm{d}x \exp\left(2i\pi\frac{ax}{\lambda}\right) = u\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a u}{\lambda}\right)$$