Les équations différentielles

pour les débutants

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse
http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/

Avant-propos

« *Differential equations are one of the basic tools of mathematics.*[1] »

V. I. ARNOLD (1937–2010)

Les équations différentielles (les équa diff en abrégé)… Voilà un domaine des mathématiques dont on se sert dans beaucoup de disciplines scientifiques. On aurait pu écrire « Les équations différentielles en Physique », « Les équations différentielles en Biologie », « Les équations différentielles en Économie », etc. De fait, de nombreux (et volumineux) ouvrages existent sur ces sujets. Le problème des équations différentielles est qu'il y a beaucoup de choses à dire, et ce à tous les niveaux d'étude… Notre objectif dans le présent livre est de guider les premiers pas dans l'étude des équations différentielles, de manière très progressive, en ne nous appuyant que sur ce qui est disponible et acquis à l'issue des études en lycée[2]. Ainsi, nous avons été amené à tout faire « à la main », en n'utilisant que « les moyens du bord », dans un style de progression qui nous est cher : en spirale plutôt que linéaire. Le domaine couvert démarre au niveau des classes de Terminale et se poursuit de manière à englober ce qui figure habituellement dans les programmes de formation de niveaux Bac+1 et Bac+2. En fait, par certains aspects du « non linéaire » (chapitre 6), nous sommes allés au-delà, défrichant ce qui est davantage du niveau Bac+3. Mis à part un résultat d'existence et d'unicité au chapitre 3, tout est démontré, en considérant les objets mathématiques les plus simples possibles (ainsi, si tout peut être fait avec les fonctions à valeurs réelles, inutile d'aller chercher les fonctions à valeurs complexes ; cela peut être plus confortable pour le formateur, mais pas nécessairement pour l'étudiant). Ce qui est présenté l'est de manière suffisamment détaillée pour que sa connaissance (active !) remplisse pour le lecteur-étudiant la fonction de SMIC (= Savoir Minimum Indispensable pour Continuer)… Les paragraphes ou passages en petits caractères peuvent être sautés en première lecture. Nous terminons cet avant-propos avec quelques réflexions laissées à la méditation du lecteur.

« *Les équa diff, c'est pas diff…* »

Un étudiant (qui a souhaité conserver l'anonymat)

« *Ne vous laissez pas impressionner par ceux qui semblent plus doués, brillants, rapides. Prenez votre temps et votre chemin, vous pourrez en doubler plus d'un.* »

M. VERGNE (1943–), mathématicienne académicienne

1. « Les équations différentielles sont l'un des outils fondamentaux des mathématiques. »
2. Les programmes de mathématiques des classes de Terminale (*Bulletin Officiel* d'octobre 2011) ne font plus apparaître d'étude spécifique d'équations différentielles, même les plus simples.

« *Rien de si pratique… qu'une bonne théorie.* »

H. VON HELMHOLTZ (1821–1874)

« *Science is not and will not be a closed book. Every important advance brings new questions. Every development reveals, in the long run, new and deeper difficulties.*[3] »

A. EINSTEIN (1879–1955)

« *La science n'est ni une voie simple ni une bonne option pour faire fortune. C'est un chemin difficile, qui exige beaucoup de conviction et de passion. En échange, celui qui choisit cette voie recevra comme récompenses des émotions et des vérités qu'il lui sera difficile d'atteindre par un autre chemin.* »

NGÔ BAO CHÂU (1972–), Médaille Fields en 2010

Toulouse et Pays basque, 2010–2011

3. « La science n'est pas et ne sera pas un livre fermé. Chaque avancée importante apporte de nouvelles questions. Chaque développement révèle, à long terme, des difficultés nouvelles et plus profondes. »

Table des matières

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants, du deuxième ordre à coefficients constants

1
Chapitre

Sommaire

Ce premier chapitre a pour but d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants

$$ay'(t) + by(t) = c(t),$$

et du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t).$$

Les résultats et techniques utilisés sont (uniquement) ceux que vous avez acquis en Terminale et, pour quelques-uns, dans un enseignement d'Analyse de 1re année d'études supérieures (niveau Bac+1 ou L1). Ils se résument à ceux-ci :

- les fonctions usuelles (trigonométriques, exponentielles, polynômes) ;
- les dérivées des fonctions usuelles ;
- la règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables ;
- la fait que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle ;
- la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues ;
- la résolution des équations du second degré.

Tout cela est d'ailleurs rappelé en annexe 2, dénommée « Boîte à outils ».

L'objectif est clair : tout faire « à la main », en n'utilisant que « les moyens du bord », dans une progression en spirale plutôt que linéaire. C'est l'approche « tout avec les fonctions à valeurs réelles » qui est privilégiée, laissant l'approche « via les fonctions à valeurs complexes » comme commentaire en annexe 1.

1.1 Introduction générale

« Équations différentielles », en voilà une appellation étrange, un substantif « équations » et un qualificatif « différentiel ». Cela mérite quelques explications.

« Équations » fait bien penser *qu'il y a quelque chose à résoudre, des inconnues*. Vous avez été confronté à des situations comme :

$$\text{Résoudre l'équation} \quad x^2 + x + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Il s'agit de trouver des nombres réels x vérifiant (1.1) (s'il y en a !). Le même type de question, par exemple

$$\text{Résoudre l'équation} \quad x^2 + 1 = 0 \tag{1.2}$$

a conduit à aller regarder du côté des nombres complexes. Nous aurons aussi l'occasion de faire ce détour à l'occasion de la résolution d'équations différentielles.

« Différentielles » est là pour indiquer que *des fonctions avec leurs (fonctions) dérivées interviennent dans la formulation des équations*. Avant de donner des exemples, un mot sur les notations :

Fonctions. Lorsque l'on parlera de fonctions de la variable réelle, on écrira

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathrm{I} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

en indiquant bien l'ensemble (en général un intervalle) I sur lequel on considère f.

Variables. Seule *une* variable réelle sera en jeu ; elle sera notée x, t, θ... suivant les contextes et les habitudes des domaines scientifiques d'application.

Intervalles. Nous considérons toujours des fonctions définies sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un ensemble « d'un seul tenant », ou bien « sans trou »), et même un intervalle ouvert. Des exemples en sont :

$$\mathrm{I} = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{I} =]0, +\infty[, \qquad \mathrm{I} =]-1, +1[.$$

Dérivées d'une fonction. Plusieurs notations sont utilisées suivant les contextes et les habitudes des domaines d'application. Voici les principales :

$f'(x)$	La variable est x, f' indique la (fonction) dérivée de la fonction f
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	La variable est x, y est la notation pour la fonction de x
$\dot{x}(t)$	La variable est t, $\dot{x}(t)$ indique la (fonction) dérivée de la fonction x.

On retrouve des notations similaires pour les dérivées d'ordre supérieur, par exemple :

$$f^{(4)}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3}, \qquad \ddot{x}(t).$$

Vite dit, une équation différentielle est une relation entre une fonction et quelques-unes de ses dérivées. Une appellation tout aussi parlante eût été *« équation*

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients fonctions continues

Chapitre 2

Sommaire

Ce court chapitre a pour but d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients fonctions continues

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad t \in \mathrm{I}$$

(c'est-à-dire, a et b sont des fonctions continues sur I), généralisant en cela ce qui a été vu au § 1.3 du chapitre 1, dans lequel a et b étaient supposés constants.

Les techniques et résultats utilisés sont essentiellement les mêmes que ceux du chapitre 1. Nous nous permettons d'en ajouter quelques-uns :

- la dérivation de la fonction $t \mapsto e^{u(t)}$;
- la dérivation de la puissance d'une fonction ;
- (Important) la règle de primitivation de $\dfrac{u'}{u}$;
- les primitives des fonctions usuelles.

Cela est rappelé dans l'annexe 1 « Boîte à outils » en fin de chapitre.

Soit I un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a, b et c des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ supposées *continues* sur I. L'équation différentielle étudiée dans ce chapitre est

$$\boxed{a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad t \in \mathrm{I}} \tag{2.1}$$

Ceci est une notation abrégée pour dire que l'on cherche une fonction dérivable $y\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathrm{I}.$$

Le cas où a, b et c sont à valeurs complexes et où l'on cherche des fonctions y à valeurs complexes ne pose pas plus de difficultés. Nous ne le considérons pas toutefois ici, car l'expérience nous a montré que cette approche peut être génératrice de confusions et de mélanges.

Si a ne s'annule pas sur I, c'est que

$$\begin{aligned} & a(t) > 0 \text{ pour tout } t \in \mathrm{I}, \\ \text{ou bien} \quad & a(t) < 0 \text{ pour tout } t \in \mathrm{I}. \end{aligned}$$

En effet, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $a\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ nous dit que si $a(t_1) > 0$ et $a(t_2) < 0$, où $t_1 < t_2$, alors il existe $t \in]t_1, t_2[$ tel que $a(t) = 0$.
Donc, si a ne s'annule pas sur I, (2.1) équivaut à :

$$y' + \frac{b(t)}{a(t)} y = \frac{c(t)}{a(t)}, \quad t \in \mathrm{I}. \tag{2.1$'$}$$

Pour alléger l'écriture, nous adoptons les notations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + \beta(t) y = \gamma(t), \quad t \in \mathrm{I} \\ \beta \text{ et } \gamma\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R} \textit{ continues} \text{ sur I} \end{array}} \qquad \text{(ed)}_1$$

Ce sera notre équation différentielle modèle.

Puisque $(\text{ed})_1$ est une équation différentielle *linéaire*, il est normal, comme au § 1.3.1 du chapitre 1, de commencer par traiter le cas où le second membre γ est la fonction identiquement nulle.

2.1 Cas d'une équation différentielle $(\text{ed})_1$ avec second membre nul $(\gamma \equiv 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + \beta(t) y = 0, \quad t \in \mathrm{I} \\ \beta : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \text{ continue sur I.} \end{array}} \qquad \text{(ed)}_{1,0}$$

Rappelons qu'une primitive (ou antidérivée) de β sur I est une fonction $\mathrm{B}\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$\mathrm{B}'(t) = \beta(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathrm{I}.$$

β étant supposée continue sur I, il *existe* une primitive de β sur I ; de plus, puisque I est un *intervalle* de $\mathbb{R}$, toutes les primitives de β sur I sont de la forme $\mathrm{B} + r$, où B est une primitive (que l'on qualifie de particulière) et r un réel. Une primitive de β est parfois notée par le graphisme (ambigu) $\displaystyle\int \beta(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 2.1.1 Soit B *une* primitive de β sur I. Alors, *toutes* les solutions de $(\text{ed})_{1,0}$ sont de la forme

$$y\colon t \in \mathrm{I} \mapsto y(t) = \mathrm{C}e^{-\mathrm{B}(t)}, \tag{2.2}$$

où C est une constante réelle.

2.3 Le problème (dit) de Cauchy

Généralisant ce qui a été vu au § 1.3.2 du chapitre 1, ce qu'on appelle *problème de Cauchy* est la conjonction de l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$ et d'une condition particulière (« un passage obligé ») $y(t_0) = y_0$. Parfois, en Physique, Chimie, Biologie, t_0 est la date de démarrage ou d'observation d'un processus évoluant avec le temps t, d'où l'appellation de « condition initiale » qui est fréquemment utilisée. En bref, avec $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ *donnés* au départ, il convient de résoudre

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} y' + \beta(t) y = \gamma(t), & t \in \mathrm{I} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Avec ce qui a été démontré aux § 2.1 et 2.2, nous sommes à même d'énoncer le résultat général suivant.

Théorème 2.3.1 Pour tout jeu de données $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$, *il existe une et une seule* solution au problème de Cauchy $(\mathscr{C})$, c'est-à-dire une solution y de $(\mathrm{ed})_1$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Techniquement, il s'agit juste « d'ajuster » la constante C (de la forme générale des solutions de $(\mathrm{ed})_1$) de manière à avoir $y(t_0) = y_0$. Mais attention ! Ce n'est pas un tour de passe-passe, il y a un théorème derrière, qui dit qu'*on peut* le faire, *d'une seule façon* en plus...

Interprétation géométrique du théorème 2.3.1 : par tout point $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ il passe une et une seule solution de $(\mathrm{ed})_1$ (on dit aussi « courbe intégrale ») ; on assiste ainsi à une « stratification » (c'est-à-dire une partition) de $\mathrm{I} \times \mathbb{R}$.

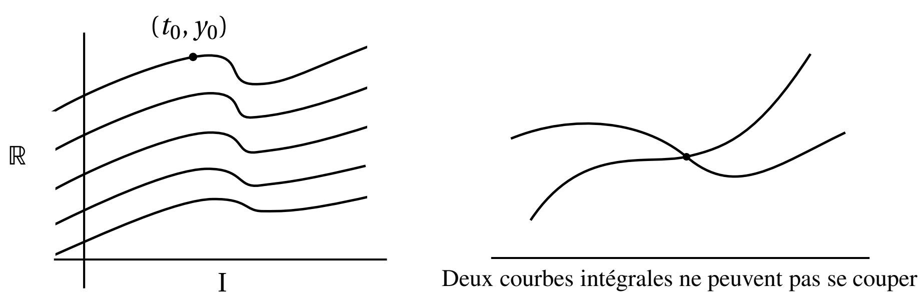

Figure 4

2.4 Retour à l'équation différentielle générale $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

On souhaite trouver, si possible, une fonction dérivable $y : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad t \in \mathrm{I}.} \tag{2.1}$$

Rien de ce qui a été présenté jusqu'à présent ne nous garantit qu'une telle fonction existe... Les ennuis viennent des $\hat{t} \in \mathrm{I}$ qui annulent a, car dans ce cas $a(\hat{t})y'(\hat{t}) = 0$

Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients fonctions continues

3
Chapitre

Sommaire

Avec ce chapitre nous abordons l'étude des équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients fonctions continues

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in \mathrm{I}$$

(c'est-à-dire, a, b et c sont des fonctions continues sur I), généralisant en cela ce qui a été vu au § 1.4 du chapitre 1 dans lequel a, b et c étaient supposés constants.

Les techniques et résultats utilisés sont les mêmes que ceux des chapitres 1 et 2. Une nouveauté s'ajoute : une technique de recherche de solution grâce aux séries entières (§ 3.2.3), que l'on peut passer en première lecture ; le b.a-ba en est rappelé en annexe 1.

Un résultat d'existence et d'unicité (théorème 3.1.1) est admis ; l'accent est mis plutôt sur la structure des solutions de ces équations différentielles et les différentes méthodes pour les résoudre.

Soit I un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a, b, c et d des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ supposées *continues* sur I. L'équation différentielle étudiée dans ce chapitre est

$$\boxed{a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in \mathrm{I}.} \tag{3.1}$$

Ceci est une notation abrégée pour dire que l'on cherche une fonction deux fois dérivable $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathrm{I}. \tag{3.2}$$

Bien sûr, on ne sait pas a priori si de telles fonctions existent. Notre étude concernera les situations où la fonction a ne s'annule pas sur I, comme dans le cas des équations différentielles du premier ordre (chapitre 2). Alors, (3.1) est équivalente à

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t), \quad t \in \mathrm{I} \\ \text{avec} \quad \beta := \dfrac{b}{a}, \quad \gamma := \dfrac{c}{a}, \quad \delta := \dfrac{d}{a} \quad \text{fonctions continues sur I.} \end{array}} \tag{ed$_2$}$$

Comme on s'y attend, depuis que nous fréquentons le monde linéaire (chapitres 1 et 2), il faut associer à $(\mathrm{ed})_2$ l'équation différentielle avec second membre nul ($\delta = 0$), dite « homogène »,

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in \mathrm{I}. \tag{(ed)$_{2,0}$}$$

Les deux résultats qui suivent sont faciles :

– L'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E} = \mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions deux fois continûment dérivables sur I)
– Si y_p est une solution (dite particulière) de $(\mathrm{ed})_2$, on a

$$\{\text{solutions de } (\mathrm{ed})_2\} = \{\text{solutions de } (\mathrm{ed})_{2,0}\} + y_p.$$

Reste à faire... l'essentiel, à savoir : étudier $(\mathrm{ed})_{2,0}$ et donner des méthodes pour trouver une solution de $(\mathrm{ed})_2$.

3.1 Résolution de l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_2$ lorsque le second membre δ est une fonction nulle

Ce paragraphe est dédié à l'étude de

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in \mathrm{I}. \tag{(ed)$_{2,0}$}$$

Contrairement au cas où β et γ sont des fonctions constantes (§ 4.1 du chapitre 1), il n'y a pas, pour résoudre $(\mathrm{ed})_{2,0}$, de méthodes systématiques basées sur des prétendues équations caractéristiques. La raison en est que la dérivée d'une fonction $t \mapsto e^{r(t)}$ est $r'(t)e^{r(t)}$ et non $r(t)e^{r(t)}$. L'examinateur-correcteur que je suis ne veut plus voir sur des copies « d'équation caractéristique $a(t)r^2 + b(t)r + c(t) = 0$ ».

3.1.1 Un résultat général d'existence et d'unicité de solutions

Nous attaquons ici un point dur... car nous sommes quelque peu démunis pour nous assurer de l'existence de solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Le théorème d'existence (et puis d'unicité) de solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ (et puis de problèmes de Cauchy associés) est un cas particulier d'un théorème général concernant les *systèmes différentiels linéaires* (ou équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre). Il y a un tour de passe-passe pour s'y ramener, qu'il convient de voir en détail la première fois. Le lecteur est convié à suivre la démarche un crayon à la main.

Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On lui associe la fonction vectorielle (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} : \mathrm{I} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \mathrm{X}(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Annexe 1 – B.A-BA des séries entières

On appelle *série entière* (ou *série de puissances*) une série de fonctions dont le terme général est $t \in \mathbb{R} \mapsto u_n(t) = c_n t^n$. Ici $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels appelée *suite des coefficients de la série entière*. La question de la convergence de la série entière de terme général $c_n t^n$ est réglée de la manière suivante : il existe $0 \leqslant \mathrm{R} \leqslant +\infty$ telle que

- la série converge si $|t| < \mathrm{R}$;
- la série diverge si $|t| > \mathrm{R}$.

Cas limites :

- Si $\mathrm{R} = 0$, la série ne converge que pour $x = 0$. Situation sans intérêt.
- Si $\mathrm{R} = +\infty$, la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est la situation de confort.

En règle générale, sur $]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$, appelé intervalle de convergence de la série, « tout se passe bien » pour la fonction f somme de la série,

$$t \in\,]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[\, \longmapsto f(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n,$$

c'est-à-dire, on peut opérer sur f comme sur les fonctions polynomiales (dont les sommes de séries entières sont des généralisations) : f est dérivable (ou primitivable) autant de fois que l'on veut, avec pour tout $t \in]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \quad \text{(on dérive terme à terme)} \\ f''(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} t^{n+1} \quad \text{(on primitive terme à terme)} \\ \mathrm{F}'(t) &= f(t) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Des techniques particulières permettent de calculer R à partir de la suite des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la série entière.

Dans l'autre sens, une fonction f est dite développable en série entière sur $]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$ (où $\mathrm{R} > 0$) lorsqu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que

$$\forall t \in]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Un point essentiel est que, contrairement à d'autres développements en séries (de Fourier, par exemple), *le développement en série entière d'une fonction est unique*. Ainsi,

$$\Big(\forall t \in]-\mathrm{R}+\mathrm{R}[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0\Big) \Longrightarrow \big(c_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\big),$$

implication dont il est fait grand usage dans le § 3.2.3.
Les relations entre les coefficients c_n et les dérivées d'ordre n de f en 0 sont les mêmes que pour les fonctions polynomiales :

$$c_0 = f(0), \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Les fonctions usuelles que vous avez rencontrées sont développables en série entière, avec des rayons de convergence R connus. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} && \mathrm{R} = +\infty \\ \sin t &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} && \mathrm{R} = +\infty \\ \arctan t &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} && \mathrm{R} = 1 \end{aligned}$$

Aide à la mémorisation : la forme des développements en série entière (des fonctions usuelles) est comme celle de leurs développements limités de Taylor-MacLaurin, sauf qu'il s'agit de développements... illimités.

Équations différentielles linéaires vectorielles (ou systèmes différentiels linéaires) du premier ordre à coefficients constants

4
Chapitre

Sommaire

À la différence des chapitres précédents, celui-ci considère les équations différentielles vectorielles (ou systèmes différentiels) ; c'est le premier du genre. Les équations différentielles vectorielles seront toujours du premier ordre, ce qui, nous le verrons, n'est pas une perte de généralité. En revanche, il s'agira d'équations différentielles à coefficients constants, ce qui rend la vie plus facile qu'aux chapitres 2 et 3, et nous rapproche du chapitre 1. D'ailleurs, ce chapitre 4 peut être considéré comme le « cousin vectoriel » du chapitre 1.

Il sera fait appel dans ce chapitre à des notions et des résultats issus de l'algèbre linéaire et du calcul matriciel, entre autres :

- les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice ;
- le polynôme caractéristique d'une matrice ;
- le théorème de Cayley-Hamilton ;
- des rudiments sur la diagonalisation ou la trigonalisation d'une matrice.

Nous avons étudié au chapitre 1 les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants

$$x'(t) = ax(t) + b(t)$$

(nous avons changé ici la notation de la fonction inconnue, de y à x). C'est la généralisation au cas *vectoriel* qui est l'objet de ce chapitre. Nous restons dans le monde linéaire et les coefficients en jeu sont constants. Les fonctions inconnues étant à valeurs vectorielles, et non plus scalaires, nous utiliserons la notation $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ (plutôt que $t \mapsto x(t)$). Exemple de question considérée : trouver les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + \cos t \\ y'(t) = -x(t) + 4y(t) + e^t. \end{cases} \tag{4.1}$$

S'il n'y avait eu que $x(t)$ et $x'(t)$ apparaissant dans la première équation de (4.1), on l'aurait résolue avec les techniques présentées au chapitre 1 ; de même s'il n'y avait eu que $y(t)$ et $y'(t)$ apparaissant dans la deuxième équation de (4.1). Or, $x(t)$ et $y(t)$ se mélangent dans les deux équations différentielles (scalaires) de (4.1) ; c'est cela qui fait la difficulté du problème. On peut écrire (4.1) sous la forme matricielle que voici :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

De manière générale, les équations différentielles étudiées dans ce chapitre se présentent sous la forme (matricielle) suivante :

$$\boxed{X'(t) = AX(t) + b(t)} \tag{EDL}$$

où A est une matrice carrée n par n à coefficients réels, $b : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction (vectorielle) *continue* sur *l'intervalle ouvert* I de $\mathbb{R}$, et $X : t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction (vectorielle) inconnue. (EDL) est une écriture ramassée de la forme plus détaillée suivante (n équations différentielles linéaires scalaires, mais non « indépendantes ») :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Pour récupérer l'écriture (EDL), on pose

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Il ne faut pas se laisser intimider par la taille de ce système, indiqué par l'entier n... Si vous comprenez bien ce qui se passe et comment faire lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, ce sera parfait !

Comme on s'y attend, et selon une procédure déjà bien rodée dans les chapitres précédents, il faudra, pour résoudre (EDL), en passer par la résolution de l'équation différentielle linéaire *homogène* (ou sans second membre) associée à (EDL), à savoir

$$X'(t) = AX(t). \tag{EDL$_0$}$$

Ensuite,

$$\{\text{solutions de (EDL)}\} = \{\text{solutions de (EDL)}_0\} + \text{une solution « particulière » de (EDL)}.$$

Encore faut-il s'assurer *qu'il y a* des solutions de (EDL)$_0$ comme de (EDL). De ce point de vue, la vie sera facilitée par le fait que la matrice A est à coefficients

Classification des systèmes différentiels $X' = AX$ lorsque A est une matrice (2,2)

5
Chapitre

Sommaire

Ce chapitre peut être considéré comme une annexe du chapitre précédent. Il consiste à tirer profit des propriétés particulières des matrices réelles $(2,2)$ et de la géométrie du plan pour classer les différentes formes des solutions de $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Prérequis :

$$\begin{cases} \text{– Résultats généraux du chapitre 4} \\ \text{– Valeurs propres des matrices réelles (2,2)} \\ \text{– Techniques de représentation des courbes simples dans le plan} \end{cases}$$

5.1 Introduction

Nous revenons dans ce chapitre au cas où $n = 2$, c'est-à-dire à un couple de deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (homogènes de surcroît) :

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t), \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad (\mathrm{EDL})_0$$

soit encore

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases}$$

$(\mathrm{EDL})_0$ est une équation différentielle vectorielle *autonome*, au sens où le second membre $\mathrm{AX}(t)$ ne dépend de t que via $\mathrm{X}(t)$ (au contraire de $\mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$, non étudiée ici). Comme presque toujours en Physique ou en Mécanique, ce n'est pas tellement la date t qui importe (dans l'évolution de l'état $\mathrm{X}(t)$ décrit par l'équation différentielle) mais la position $\mathrm{X}(t)$ à l'instant t.

Dans le cas des équations différentielles scalaires (chapitres 1, 2 et 3), on est amené à tracer le graphe de la (ou des) solution(s) $\{(t, x(t)) \mid t \in \mathrm{I}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ici, comme dans le chapitre suivant (chapitre 6), du fait que $(\mathrm{EDL})_0$ est autonome et que $n = 2$, on considérera les ensembles

$$\{\mathrm{X}(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in \mathrm{I}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

appelés *trajectoires* ou *orbites* des solutions X de $(\mathrm{EDL})_0$. L'espace $\mathbb{R}^2$ (= le plan) où vit $\mathrm{X}(t)$ s'appelle le *plan des trajectoires*, ou *plan de phase* (en Physique, Mécanique).

Tracer l'allure générale des trajectoires, avec des flèches indiquant le sens de parcours quand t croît, s'appelle dessiner le *portrait des trajectoires* ou *portrait de phase*.

Sans résoudre explicitement $(\mathrm{EDL})_0$, il importe de pouvoir dégager les *propriétés qualitatives* des solutions, comme : leur caractère périodique ou pas, leur comportement quand $t \to +\infty$, etc. C'est à quoi nous nous attelons à présent, tout dépendant ici (comme on l'imagine) des propriétés spectrales (c'est-à-dire des valeurs propres) de la matrice A.

Rappelons que dans le cas qui nous préoccupe, celui où $n = 2$, on peut expliciter la solution du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t) \\ \mathrm{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

en fonction des valeurs propres de A. De fait, *la* solution de $(\mathscr{C})$ est $\mathrm{X}(t) = e^{t\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $e^{t\mathrm{A}}$ est explicité dans tous les cas de figure (théorème 4.1.14 du chapitre 4). Ce résultat suffit pour un traceur graphique.

Ce que nous voulons ici est de pouvoir donner « à la main » l'allure générale des trajectoires X des solutions de $(\mathrm{EDL})_0$, suivant les propriétés spectrales de A.

5.2 Situations où A est inversible et les valeurs propres de A sont distinctes

Si A est inversible, le seul point (x_0, y_0) du plan $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $(x_0, y_0) = (0,0)$, c'est-à-dire l'origine. Donc, $\mathrm{X} \equiv 0$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5.1}$$

En bref : si je suis en $(0,0)$, j'y reste... Le point origine $(0,0)$ est une trajectoire particulière, qui jouera son rôle dans la classification qui va suivre.

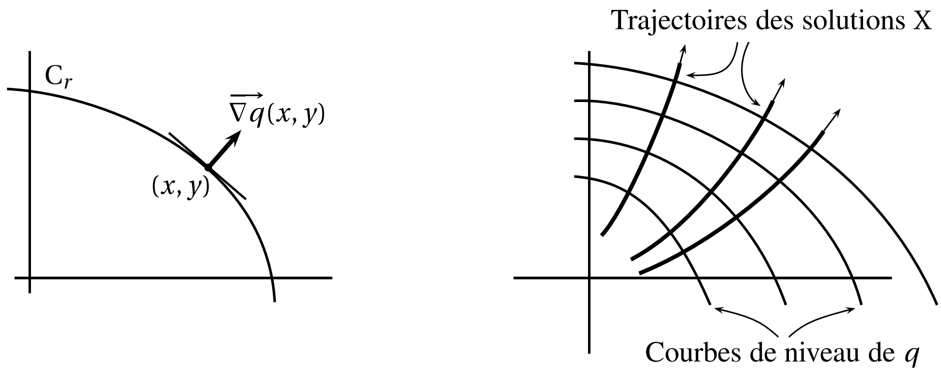

Figure 5

Ce qu'exprime (5.9) est donc qu'à chaque instant t, le vecteur vitesse $X'(t)$ d'une solution X de $(\mathrm{EDL})_0$ suit le gradient de la fonction q à la position $X(t)$. En conséquence, les trajectoires suivies par les solutions X de $(\mathrm{EDL})_0$ (les orbites donc) sont des courbes orthogonales aux courbes de niveau C_r de q.

Revoyons à la lumière de ces observations les trois cas de figure examinés jusqu'à présent (valeurs propres réelles λ_1, λ_2).

- 1^er^ cas : $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Alors, le graphe de la fonction q (*cf.* (5.8)) a la forme d'un bol. Ses courbes de niveau sont des ellipses.
- 2^e^ cas : $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Alors, le graphe de la fonction q a la forme d'une calotte. Ses courbes de niveau sont encore des ellipses. Ce n'est que la version « renversée » du précédent.
- 3^e^ cas : $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Le graphe de la fonction q a alors la forme d'une selle de cheval ou d'un col. Ses courbes de niveau sont des hyperboles.

En suivant, en chaque instant t, la direction de « plus grande montée » de la fonction q en $(x(t), y(t))$, une solution $X(t)$ de $(\mathrm{EDL})_0$ s'éloigne de $\Omega = (0,0)$ dans le premier cas, s'en approche dans le deuxième cas, et est un mélange des deux (« ça dépend »...) dans le troisième cas. Voir la figure 6.

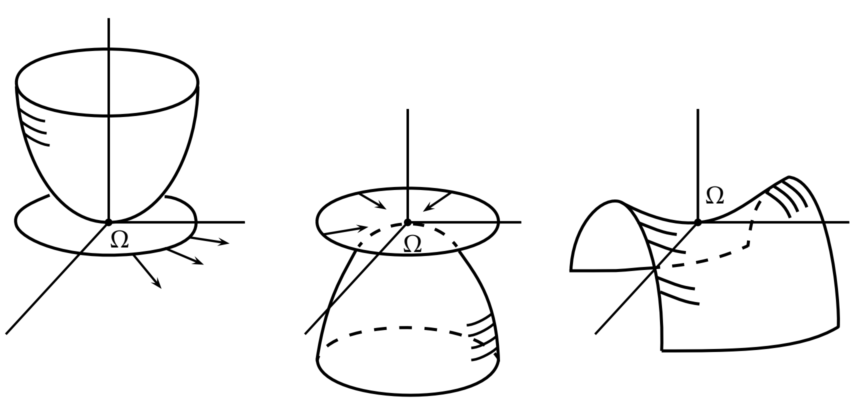

Figure 6

Équations différentielles non linéaires : une première visite

Chapitre 6

Sommaire

« Ce qui est simple est toujours faux, ce qui ne l'est pas est inutilisable »

P. Valery

Avec ce chapitre nous entrons dans le vif des équations différentielles *non linéaires*... Le monde est non linéaire : *too bad* ! Certaines des choses dites à propos des équations différentielles linéaires (dans les chapitres précédents) restent valables, mais il y a bien des propriétés qu'on ne peut imaginer retrouver dans le cas non linéaire (qui est, de fait, plus difficile à traiter).

Pour cette première visite de l'immeuble « équations différentielles non linéaires », nous nous contenterons de jeter un coup d'œil dans deux pièces :

– celle des équations différentielles *scalaires*,

$$y'(t) = f(t, y(t));$$

– celle des équations différentielles *vectorielles autonomes* où l'espace de phase est le *plan* :

$$\begin{cases} x'(t) = f\left[x(t), y(t)\right] \\ y'(t) = g\left[x(t), y(t)\right]. \end{cases}$$

Commençons par des généralités.

6.1 Généralités

6.1.1 Ce qu'est une équation différentielle, ce que signifie « la résoudre »

Le cas scalaire

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) &\longmapsto f(t, u) \end{aligned} \qquad \text{Espaces de même dimension !} \tag{6.1}$$

une fonction continue (au moins). Une équation différentielle du premier ordre est une « équation aux dérivées » du type

$$x' = f(t,x). \tag{ed}$$

Jusqu'ici, pour les équations différentielles scalaires, nous utilisions la notation $y(t)$ pour les fonctions inconnues. Autres notations utilisées :

$\dot{x} = f(t,x)$	en Mécanique, Automatique
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$	en Physique, Biologie
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$	en Mathématiques, dans des problèmes de nature géométrique où les inconnues sont des courbes graphes de fonctions $y \mapsto y(x)$

etc.

On appelle *solution* de (ed) un couple (J, x) où :

- J est un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$;
- $x\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J ;

tels que

- $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in \mathrm{J}$ (puisque l'on va appliquer f à $(t, x(t))$!) ;
- $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in \mathrm{J}$.

Une solution est donc un couple (même si par habitude on parlera de « solution x définie sur J »), J peut varier et, bien entendu, plus J est grand et mieux c'est... Cette insistance à accompagner x de l'intervalle sur laquelle elle est définie n'avait pas lieu d'être dans le monde linéaire ; elle apparaîtra de manière essentielle dans le monde non linéaire. « Résoudre » ou « intégrer » (ed) signifie trouver les solutions de (ed). « Intégrer » est un vocable vieillot, demeuré en usage depuis l'époque où l'on s'efforçait de résoudre toutes les équations différentielles par intégration.

Exemple 6.1.1 Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = [x(t)]^2\,.$$

La fonction $x_1\colon\ t \in \mathrm{J} = \,]-1,1[\, \mapsto x_1(t) = \dfrac{1}{1-t}$ est une solution de cette équation différentielle ; la fonction $x_2\colon\ t \in \mathrm{J} = \,]-\infty,1[\, \mapsto x_2(t) = \dfrac{1}{1-t}$ aussi... On peut considérer qu'on a « mieux » résolu l'équation différentielle avec la solution x_2, puisque celle-ci est un prolongement (ou une extension) de x_1.

La variable, *unidimensionnelle*, par rapport à laquelle se font les dérivations sera notée (habituellement) t, en référence au temps qu'elle représente souvent dans les applications.

Premiers pas dans l'approximation numérique des solutions d'équations différentielles : la méthode d'Euler

7

Chapitre

Sommaire

« Nous devons nous contenter d'améliorer indéfiniment nos approximations... »

K. Popper, *L'univers irrésolu...*, Hermann (1974)

Nous avons déjà dit que, pour la plupart des équations différentielles, les solutions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions (élémentaires) que vous connaissez. Pourtant, pour de telles équations, les logiciels graphiques adaptés permettent de tracer des courbes qui sont censées représenter des approximations précises des solutions.

Comment procèdent-ils ?

La réponse à cette question réside dans les *méthodes numériques*, grâce auxquelles les programmes calculent de proche en proche des approximations de solutions. Le sujet est vaste, pas vraiment accessible à des débutants ; nous nous contenterons d'en exposer des éléments d'introduction assez élémentaires. Ce court chapitre est inspiré de [HW, ch. 3].

7.1 La méthode d'Euler

7.1.1 Présentation

C'est la méthode d'approximation de solutions d'équations différentielles la plus simple, la plus grossière aussi... Elle est présentée ici pour son rôle conceptuel d'*explication des idées de base* d'un schéma d'approximation.

Nous cherchons à approcher la solution u du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C})\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sur $[t_0, t_f]$ par exemple. Nous ne connaissons pas $u(t)$ (sauf en t_0, bien sûr), mais nous savons que $u'(t_0) = f(t_0, u(t_0))$ (qui vaut $f(t_0, x_0)$).

Si t est augmenté d'un petit pas $h > 0$, le graphe de la solution u reste proche de sa tangente en t_0 (du moins on peut l'espérer). Si l'on suit cette tangente, on aboutit à

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0). \end{cases} \tag{7.1}$$

Ensuite, on recommence en partant du point (t_1, x_1) (en utilisant le substitut $f(t_1, x_1)$ au lieu du vrai $u'(t_1) = f(t_1, u(t_1))$), et on arrive à un point

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + h \\ x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1). \end{cases} \tag{7.2}$$

Et ainsi de suite.

L'approximation (dite) d'Euler u_h de la (vraie) solution u est la fonction affine par morceaux dont le graphe (= ligne polygonale) passe par tous ces points (t_i, x_i).

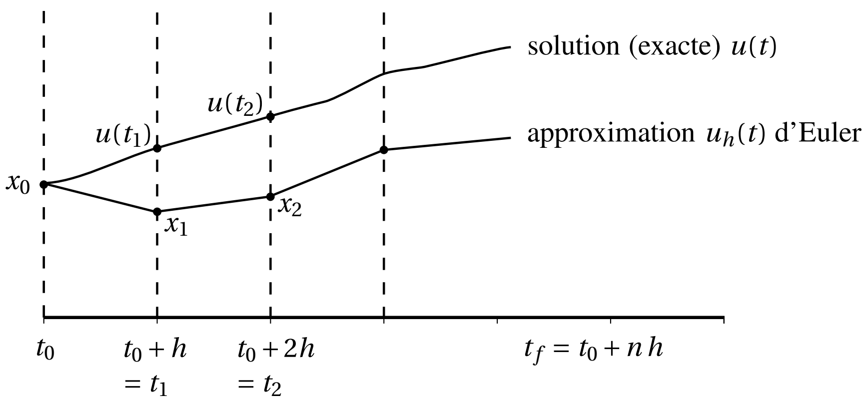

Figure 1

Formalisons ce qui a été dit.

Définition 7.1.1 Étant donné un pas $h > 0$ (fixé pour simplifier les choses), on définit une suite de points (t_i, x_i) de la manière suivante :

$$\forall i = 1, 2, \dots, \quad \begin{aligned} t_i &:= t_{i-1} + h = t_0 + ih \\ x_i &:= x_{i-1} + hf(t_{i-1}, x_{i-1}). \end{aligned}$$

L'approximation d'Euler u_h est la fonction définie par

$$u_h(t) := u_i + (t - t_i) f(t_i, x_i) \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Vignette historique

Nous présentons un raccourci de l'histoire du développement des équations différentielles, du XVII^{e} siècle au XX^{e} siècle.

XVII^{e} siècle Ça a démarré avec Newton et ses successeurs immédiats, à la suite du développement du *calcul infinitésimal*. Newton a considéré les équations différentielles du 1er ordre dans sa *Méthode des fluxions et des suites infinies* (rédigée en 1671, mais publiée seulement en 1736). Les équations différentielles étaient appelées à l'époque des « relations entre fluxions et quantités fluentes ». Fermat avait fait allusion à un problème d'équation différentielle (« le problème inverse des tangentes ») sans en dire plus.

XVIII^{e} siècle Ce siècle voit l'ère d'un développement interne des équations différentielles. Sont résolues, plus ou moins explicitement, un grand nombre d'équations différentielles émanant essentiellement des Sciences comme l'Astronomie et la Physique (ou la Mécanique). Tous les grands mathématiciens de ce siècle se sont intéressés aux équations différentielles (Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Riccati et – comment l'éviter ? – Euler). Le « calcul intégral » y joue un rôle important.

XIX^{e} siècle La première moitié du siècle voit « une construction » de l'Analyse, avec Gauss, Bolzano... Une nouvelle ère est ouverte par Cauchy. C'est en ce siècle que l'on assiste au début des études qualitatives des solutions, de leur existence et de leur unicité.

XX^{e} siècle Le XX^{e} siècle voit l'introduction des méthodes de l'Analyse fonctionnelle (ou méthodes topologiques) pour des études qualitatives approfondies des solutions. C'est aussi le siècle du développement massif des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, aidé et stimulé en cela par des ordinateurs de plus en plus puissants.