

Mode d'emploi

Cet ouvrage contient des corrigés sur le modèle des meilleures copies de concours. Outre que les réponses données sont exactes et complètes, une excellente copie se distingue par sa rédaction succincte mais efficace.

Pendant l'année, vos professeurs vous invitent, avec raison, à rédiger très soigneusement, peut-être même laborieusement, pour vous habituer à vous interroger sur votre démarche à mesure que vous la déroulez ; pour vous permettre de vérifier que vos explications s'enchaînent de manière parfaitement logique ; pour, enfin, bien faire comprendre que les idées ne sont pas dans les équations mais entre les équations. Leur insistance sur la rédaction a donc une portée pédagogique ; bien rédiger, c'est bien penser. En fin d'année, vous devez savoir produire une rédaction de ce type, un peu longue et mécanique mais sans mauvaise surprise. C'est un point de départ obligé.

Aux concours, toutefois, il n'y a pas de points de bonus pour les copies parfaitement rédigées. Et pas non plus de temps à perdre. Un correcteur n'a pas besoin de lire en détail chaque phrase, il repère très vite si le candidat répond correctement à la question. En outre, pour chacune des 500 copies qu'il doit corriger aussi vite que possible, il doit suivre un barème qui apporte des points selon le fond (« Toutes les hypothèses du théorème sont bien vérifiées : 1 point »), pas selon la forme – même s'il est fortement conseillé de simplifier son travail en écrivant correctement et en encadrant les résultats. Une rédaction efficace doit rester claire et rigoureuse, mais elle n'a pas besoin d'être scolaire. L'élégance réside dans la précision et la légèreté. Tout ce qui n'apporte pas du sens peut être éliminé. Attention toutefois, n'enlevez pas trop de choses : rédiger de manière insuffisante ou télégraphique entraîne une perte de points, jusqu'à 10% de la note. Vous aurez trouvé le bon équilibre lorsque vous aurez enlevé de votre rédaction tout ce qui peut l'être, et pas plus. C'est un apprentissage délicat, mais rémunérateur car il économise votre temps pendant les épreuves. Cet ouvrage vous y aidera.

Les corrigés que vous allez découvrir sont courts car ils apportent exactement les bons arguments. Gardez cependant à l'esprit qu'ils sont écrits pour un correcteur et non pour un élève : si certains passages vous semblent trop rapides, n'hésitez pas à vous reporter à des corrigés très détaillés comme ceux des *Annales des Concours*. Ici, vous apprendrez par l'exemple comment produire une copie complète et parfaite.

Contacts

Pour signaler une erreur :

Errare.humanum.est@H-K.fr

Pour envoyer une idée ou une critique :

contact@H-K.fr

Retrouvez-nous en ligne

Si des erreurs nous sont signalées, elles seront détaillées, ainsi que des correctifs, sur notre site www.H-K.fr. Vous y trouverez également bien d'autres outils pour préparer vos concours.

Bon travail, et bonne réussite !
Les auteurs

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
<hr/> MINES-PONTS <hr/>			
Maths 1 2009	Étude spectrale d'un opérateur de transfert. <i>espaces vectoriels normés</i>	7	12
Maths 1 2008	Translations dans des espaces de fonctions. <i>réduction des endomorphismes, polynômes, matrices, coefficients de Fourier</i>	18	22
Maths 1 2007	Pseudo-inverse et matrice stochastique. <i>espaces vectoriels de dimension finie, applications linéaires, matrices, changements de base, théorème du rang</i>	27	32
Maths 2 2009	Autour du noyau de Poisson. <i>continuité, théorèmes d'intégration, développement en série entière</i>	38	43
Maths 2 2008	Stabilité d'un polynôme trigonométrique. <i>fonctions usuelles, développements limités, calcul intégral, théorème de Parseval</i>	48	54
Maths 2 2007	Étude d'une série trigonométrique. <i>intégrales généralisées, séries de fonctions</i>	60	64
<hr/> CENTRALE-SUPÉLEC <hr/>			
Maths 1 2009	Séries factorielles. <i>fonctions de la variable réelle, séries entières, interversions de séries et d'intégrales</i>	70	76
Maths 1 2008	Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants. <i>équations différentielles, espaces vectoriels, polynômes, séries entières, théorème de convergence dominée</i>	86	92
Maths 1 2007	Transformée de Laplace. <i>théorème de convergence dominée, intégration</i>	99	103

Maths 2 2009	Méthode du gradient. <i>algèbre linéaire, espaces vectoriels normés</i>	112	119
Maths 2 2008	Étude de suites récurrentes linéaires. <i>suites numériques, algèbre linéaire, réduction</i>	127	135
Maths 2 2007	Résolution de l'équation $P(g) = f$ avec f et g deux endomorphismes. <i>algèbre linéaire et bilinéaire, diagonalisation simultanée, théorème de d'Alembert-Gauss</i>	143	149

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Maths 1 2009	Fonctions matriciellement croissantes. <i>produit scalaire, matrices symétriques, déterminant, équivalents</i>	158	163
Maths 1 2008	Matrices symétriques à coefficients positifs. <i>algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, topologie</i>	171	175
Maths 1 2007	Racines carrées de matrices. <i>diagonalisation, polynômes d'endomorphismes et de matrices</i>	182	186
Maths 2 2009	Polynômes d'Hermite et analyse de Fourier. <i>séries entières, intégrales à paramètres, séries de fonctions, séries de Fourier</i>	195	198
Maths 2 2008	Variations autour des intégrales de Wallis. <i>suites récurrentes, intégrales généralisées, trigonométrie</i>	204	207
Maths 2 2007	Étude des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sur un intervalle. <i>équations différentielles linéaires, fonctions de deux variables, intégrales à paramètres</i>	214	218

CCP Maths 1 PC 2009 — Corrigé

I.1 Soient $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ${}^t({}^tMSM) = {}^tM {}^tS {}^tM = {}^tMSM$ car S est symétrique.
- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX({}^tMSM)X = {}^t(MX)S(MX) \geq 0$ car S est positive.

$${}^tMSM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

I.2 Comme S est symétrique, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale tels que $S = PDP^{-1} = PD {}^tP$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $Y = {}^tPX = {}^t(y_1 \cdots y_n)$.

- Si $\lambda_i \geq 0$ pour tout i , alors ${}^tX SX = {}^tY DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Si de plus $\lambda_i > 0$ pour tout i , on obtient, pour tout $X \neq 0$, $Y = P^{-1}X \neq 0$ et ${}^tX SX > 0$, donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, en prenant $Y = {}^t(0 \cdots 1 \cdots 0)$, on a ${}^tX SX = {}^tY DY = \lambda_i \geq 0$ (> 0 si de plus $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $Y \neq 0$).

$$S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(S) \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

I.3 Il est clair que A est symétrique. $\chi_A = \det(A - XI_2) = X^2 - 3X + 1$, de racines

$$\text{sp}(A) = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$$

D'après la question I.2,

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

I.4 On remarque que -1 est valeur propre de B pour ${}^t(1 \ 0 \ 0)$ donc

$$B \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

I.5 T est symétrique par hypothèse. Comme T est semblable à S , elle a les mêmes valeurs propres que S , qui sont positives car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

I.6.a Soit $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Alors $X = \lambda M^{-1}X$. Comme $\lambda \neq 0$ (M est inversible) on a $M^{-1}X = \lambda^{-1}X$ et $\lambda^{-1} \in \text{sp } M^{-1}$. Ainsi $\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{sp } M\} \subset \text{sp}(M^{-1})$. Comme $(M^{-1})^{-1} = M$, on obtient l'inclusion inverse de manière analogue.

$$\text{sp}(M^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{sp}(M)\}$$

I.6.b Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$ car S est symétrique, donc S^{-1} est symétrique.
- D'après la question précédente, $\text{sp}(S^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{sp}(S)\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ car S est définie positive (question I.2).

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \implies S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

I.7 Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = 0$. Soient $\lambda \in \text{sp}(S)$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $0 = {}^tXSX = \lambda\|X\|^2$ et comme $X \neq 0$ on a $\lambda = 0$. Puisque S est diagonalisable, S est alors semblable à la matrice nulle, donc nulle.

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXSX = 0) \implies S = 0$$

I.8.a Si $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tX(S_2 - S_1)X \geq 0$ et ${}^tX(S_1 - S_2)X \geq 0$ donc ${}^tX(S_2 - S_1)X = 0$ et d'après la question I.7, $S_1 = S_2$.

$$(S_1 \leq S_2 \text{ et } S_2 \leq S_1) \implies S_1 = S_2$$

I.8.b Prenons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $S_2 - S_1 = S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme -1 est valeur propre de cette matrice, on n'a ni $S_1 \leq S_2$ ni $S_2 \leq S_1$ d'après la question I.2.

I.8.c Prenons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question I.2, $S_1 \leq S_2$ avec $S_1 \neq S_2$ mais $S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.8.d Les valeurs propres de $\alpha(S_2 - S_1)$ sont exactement de la forme $\alpha\lambda$ pour $\lambda \in \text{sp}(S_2 - S_1)$. D'après la question I.2,

$$\text{Si } S_1 \leq S_2, \text{ alors } \alpha S_1 \leq \alpha S_2 \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha S_2 \leq \alpha S_1 \text{ pour } \alpha < 0.$$

I.8.e Puisque $S + S_2 - (S + S_1) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$S_1 \leq S_2 \implies \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad S + S_1 \leq S + S_2$$

I.9 En appliquant la question I.1 à $S_2 - S_1$ on obtient

$$S_1 \leq S_2 \implies \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad {}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M$$

I.10.a Si λ est valeur propre de S , alors $\lambda - 1$ est valeur propre de $S - I_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\lambda \geq 1$. On en déduit que $\text{sp}(S) \subset [1; +\infty[\subset \mathbb{R}^{+*}$ donc

$$S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

I.10.b S^{-1} est symétrique d'après la question I.6.b.

- D'après la question I.6.a, $\text{sp}(S^{-1}) \subset]0; 1]$ donc $0 < S^{-1}$.
- $\lambda \in \text{sp}(S^{-1}) \iff 1 - \lambda \in \text{sp}(I_n - S^{-1})$
Comme $0 < \lambda \leq 1$, on a $0 \leq 1 - \lambda < 1$ d'où $S^{-1} \leq I_n$.

$$I_n \leq S \implies 0 < S^{-1} \leq I_n$$

I.11.a Comme ${}^t({}^tMM) = {}^tM {}^t({}^tM) = {}^tMM$, on a ${}^tMM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, on a ${}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 > 0$ car $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \implies {}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$