Mode d'emploi

Cet ouvrage contient des corrigés sur le modèle des meilleures copies de concours. Outre que les réponses données sont exactes et complètes, une excellente copie se distingue par sa rédaction succincte mais efficace.

Pendant l'année, vos professeurs vous invitent, avec raison, à rédiger très soigneusement, peut-être même laborieusement, pour vous habituer à vous interroger sur votre démarche à mesure que vous la déroulez ; pour vous permettre de vérifier que vos explications s'enchaînent de manière parfaitement logique ; pour, enfin, bien faire comprendre que les idées ne sont pas dans les équations mais entre les équations. Leur insistance sur la rédaction a donc une portée pédagogique ; bien rédiger, c'est bien penser. En fin d'année, vous devez savoir produire une rédaction de ce type, un peu longue et mécanique mais sans mauvaise surprise. C'est un point de départ obligé.

Aux concours, toutefois, il n'y a pas de points de bonus pour les copies parfaitement rédigées. Et pas non plus de temps à perdre. Un correcteur n'a pas besoin de lire en détail chaque phrase, il repère très vite si le candidat répond correctement à la question. En outre, pour chacune des 500 copies qu'il doit corriger aussi vite que possible, il doit suivre un barême qui apporte des points selon le fond (« Toutes les hypothèses du théorème sont bien vérifiées : 1 point »), pas selon la forme – même s'il est fortement conseillé de simplifier son travail en écrivant correctement et en encadrant les résultats. Une rédaction efficace doit rester claire et rigoureuse, mais elle n'a pas besoin d'être scolaire. L'élégance réside dans la précision et la légèreté. Tout ce qui n'apporte pas du sens peut être éliminé. Attention toutefois, n'enlevez pas trop de choses : rédiger de manière insuffisante ou télégraphique entraîne une perte de points, jusqu'à 10% de la note. Vous aurez trouvé le bon équilibre lorsque vous aurez enlevé de votre rédaction tout ce qui peut l'être, et pas plus. C'est un apprentissage délicat, mais rémunérateur car il économise votre temps pendant les épreuves. Cet ouvrage vous y aidera.

Les corrigés que vous allez découvrir sont courts car ils apportent exactement les bons arguments. Gardez cependant à l'esprit qu'ils sont écrits pour un correcteur et non pour un élève : si certains passages vous semblent trop rapides, n'hésitez pas à vous reporter à des corrigés très détaillés comme ceux des *Annales des Concours*. Ici, vous apprendrez par l'exemple comment produire une copie complète et parfaite.

Contacts

Pour signaler une erreur : `Errare.humanum.est@H-K.fr`
Pour envoyer une idée ou une critique : `contact@H-K.fr`

Retrouvez-nous en ligne

Si des erreurs nous sont signalées, elles seront détaillées, ainsi que des correctifs, sur notre site `www.H-K.fr`. Vous y trouverez également bien d'autres outils pour préparer vos concours.

Bon travail, et bonne réussite !
Les auteurs

Sommaire

Concours Communs Polytechniques

CCP Maths 1 PC 2009 — Corrigé

I.1 Soient $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ${}^t({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM}) = {}^t\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{S}\,{}^t({}^t\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM}$ car S est symétrique.
- $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM})\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{S}(\mathrm{MX}) \geqslant 0$ car S est positive.

$$\boxed{{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{SM} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

I.2 Comme S est symétrique, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale tels que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$. Pour $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X} = {}^t(y_1 \cdots y_n)$.

- Si $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i, alors ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{DY} = \sum_{i=1}^n \lambda_i {y_i}^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si de plus $\lambda_i > 0$ pour tout i, on obtient, pour tout $\mathrm{X} \neq 0$, $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} \neq 0$ et ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} > 0$, donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, en prenant $\mathrm{Y} = {}^t(0 \cdots 1 \cdots 0)$, on a ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{SX} = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{DY} = \lambda_i \geqslant 0$ (> 0 si de plus $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{Y} \neq 0$).

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^+ \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}\,(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^{+*}}$$

I.3 Il est clair que A est symétrique. $\chi_\mathrm{A} = \det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_2) = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1$, de racines

$$\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^{+*}$$

D'après la question I.2, $\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$

I.4 On remarque que -1 est valeur propre de B pour ${}^t(1\ 0\ 0)$ donc

$$\boxed{\mathrm{B} \notin \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

I.5 T est symétrique par hypothèse. Comme T est semblable à S, elle a les mêmes valeurs propres que S, qui sont positives car $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

I.6.a Soit $\mathrm{X} \neq 0$ tel que $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. Alors $\mathrm{X} = \lambda\mathrm{M}^{-1}\mathrm{X}$. Comme $\lambda \neq 0$ (M est inversible) on a $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{X} = \lambda^{-1}\mathrm{X}$ et $\lambda^{-1} \in \mathrm{sp}\,\mathrm{M}^{-1}$. Ainsi $\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,\mathrm{M}\} \subset \mathrm{sp}\,(\mathrm{M}^{-1})$. Comme $(\mathrm{M}^{-1})^{-1} = \mathrm{M}$, on obtient l'inclusion inverse de manière analogue.

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{M}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{M})\}}$$

I.6.b Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- ${}^t(\mathrm{S}^{-1}) = ({}^t\mathrm{S})^{-1} = \mathrm{S}^{-1}$ car S est symétrique, donc S^{-1} est symétrique.
- D'après la question précédente, $\mathrm{sp}\,(\mathrm{S}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{S})\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ car S est définie positive (question I.2).

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathrm{S}^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

I.7 Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X\,S X = 0$. Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\,(S)$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $0 = {}^t X\,S X = \lambda \|X\|^2$ et comme $X \neq 0$ on a $\lambda = 0$. Puisque S est diagonalisable, S est alors semblable à la matrice nulle, donc nulle.

$$\boxed{(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t X\,S X = 0) \Longrightarrow S = 0}$$

I.8.a Si $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_1$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t X(S_2 - S_1)X \geqslant 0$ et ${}^t X(S_1 - S_2)X \geqslant 0$ donc ${}^t X(S_2 - S_1)X = 0$ et d'après la question I.7, $S_1 = S_2$.

$$\boxed{(S_1 \leqslant S_2 \ \text{ et } \ S_2 \leqslant S_1) \Longrightarrow S_1 = S_2}$$

I.8.b Prenons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $S_2 - S_1 = S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme -1 est valeur propre de cette matrice, on n'a ni $S_1 \leqslant S_2$ ni $S_2 \leqslant S_1$ d'après la question I.2.

I.8.c Prenons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question I.2, $S_1 \leqslant S_2$ avec $S_1 \neq S_2$ mais $S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.8.d Les valeurs propres de $\alpha(S_2 - S_1)$ sont exactement de la forme $\alpha\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}\,(S_2 - S_1)$. D'après la question I.2,

$$\boxed{\text{Si } S_1 \leqslant S_2, \text{ alors } \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2 \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha S_2 \leqslant \alpha S_1 \text{ pour } \alpha < 0.}$$

I.8.e Puisque $S + S_2 - (S + S_1) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$,

$$\boxed{S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad S + S_1 \leqslant S + S_2}$$

I.9 En appliquant la question I.1 à $S_2 - S_1$ on obtient

$$\boxed{S_1 \leqslant S_2 \Longrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad {}^t M\,S_1 M \leqslant {}^t M\,S_2 M}$$

I.10.a Si λ est valeur propre de S, alors $\lambda - 1$ est valeur propre de $S - I_n \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ donc $\lambda \geqslant 1$. On en déduit que $\mathrm{sp}\,(S) \subset [\,1\,; +\infty\,[\, \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\boxed{S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

I.10.b S^{-1} est symétrique d'après la question I.6.b.

- D'après la question I.6.a, $\mathrm{sp}\,(S^{-1}) \subset \,]\,0\,; 1\,]$ donc $0 < S^{-1}$.
- $\lambda \in \mathrm{sp}\,(S^{-1}) \iff 1 - \lambda \in \mathrm{sp}\,(I_n - S^{-1})$
  Comme $0 < \lambda \leqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - \lambda < 1$ d'où $S^{-1} \leqslant I_n$.

$$\boxed{I_n \leqslant S \Longrightarrow 0 < S^{-1} \leqslant I_n}$$

I.11.a Comme ${}^t({}^t M\,M) = {}^t M\,{}^t({}^t M) = {}^t M\,M$, on a ${}^t M\,M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, on a ${}^t X\,{}^t M\,M X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 > 0$ car $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^t M\,M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$