

**PSI**  
**Physique · Modélisation · Chimie**  
**2021**

Sous la coordination de

Alexandre HERAULT  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Louis SALKIN  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Arthur ALEXANDRE  
ENS Paris-Saclay

Virgile ANDREANI  
ENS Ulm

Steve ARNEFAUX  
professeur en CPGE

Nicolas COURRIER  
professeur en CPGE

Jérôme DIDIER  
professeur en CPGE

Jacques DING  
École Polytechnique

Baptiste FRAÏSSE  
ENS Paris-Saclay

Alexandre HERAULT  
professeur en CPGE

Tom MOREL  
professeur en CPGE

Stéphane RAVIER  
professeur en CPGE

Louis SALKIN  
professeur en CPGE

# Sommaire thématique de physique

2015 – 2021

e3a MP Physique et Chimie (2021)		•		•			•					•		
e3a PC Physique et Chimie (2021)		•							•	•				
e3a PSI Physique et Chimie (2021)					•				•	•				
CCINP MP Physique			•	••	••		••			•••	•••	••	••	••
CCINP MP Physique et Chimie	•••	••			•		•••			••	••	•	•	•
CCINP PC Physique	••	••		••	••		•••	••	•	••	••	••	••	••
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie	••	••		•			••					•	•••	••
CCINP PSI Physique et Chimie	••	••		•	•••	••	••	••	•	••	••	•		
CCINP PSI Modélisation numérique	••	••			••	••	•	••		••				••
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	••	••	•	••		•••			••			••	••
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		••	•		••			••	••	•		•
Centrale PC Physique 1	•			••	•		•	••	••	•••	••	••	••	••
Centrale PC Physique 2	••	••	•	••	•		••	••	••	•	••	••	••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	••		••	••	••	••	••		••				
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•••	••			••	••	••	••	•	••	•			
Mines MP Physique 1	••	•	•		••		•••		••	••	••	••	•	•
Mines MP Physique 2	••	•	••	••	•		•••			••	••	•	••	••
Mines PC Physique 1	••	•	•		••		•••	••	••	••	••	••		
Mines PC Physique 2	••	•		•			•••	••	••	••	••	••	••	••
Mines PSI Physique 1	•	•			••		••	••	••	••	••	•		
Mines PSI Physique 2	•				••	••	••	••	••	••	••	•		
X/ENS MP Physique	••		•				••		•	••	••			
X/ENS MP Physique et SI	•	•		•	••		•••		•	•	••	•	•	•
X/ENS PC Physique A	••	•			•		••	••	•	••	••	••	••	•
X/ENS PC Physique B		•		••			••	••	••	••			•	
X/ENS PSI Physique	•	•		••	••	•	••		••	•	•	•	•	
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•	•		•	••	••	••	••		•				••
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnéto-statique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique	Informatique pour tous	

---

# Sommaire

---

		Énoncé	Corrigé
	<b>E3A</b>		
Physique et Chimie	Étude d'un haut-parleur électrodynamique. Dosage d'un produit bactéricide.  <i>induction électromagnétique, ondes mécaniques, électricité, ondes sonores, oxydoréduction, solutions aqueuses</i>	11	23

## CONCOURS COMMUN INP

Physique et Chimie	Étude de quelques phénomènes naturels et environnementaux.  <i>mécanique, électrocinétique, signaux numériques, thermodynamique, solutions aqueuses, mélanges binaires</i>	40	56
Modélisation et Ingénierie numérique	Régulation d'un système de climatisation à débit d'air variable.  <i>asservissement, mécanique des solides, thermodynamique, équations différentielles, électronique, intégration numérique</i>	77	96

## CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	Le feu et l'eau.  <i>thermodynamique, diffusion thermique, mécanique des fluides, cristallographie</i>	112	122
Physique et Chimie 2	Conception technique d'une éolienne.  <i>mécanique, électromagnétisme, oxydoréduction, diagrammes E-pH, courbes courant-potentiel</i>	140	154

### MINES-PONTS

Physique 1	Télécommunications. <i>physique des ondes, dispersion et absorption</i>	174	181
Physique 2	Vélocimétrie laser Doppler. <i>optique, mécanique des fluides, électronique, électromagnétisme</i>	198	207
Chimie	Autour du strontium. <i>cristallographie, solutions aqueuses, cinétique chimique, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	223	229

### POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Autour de la modulation acousto-optique. <i>électrocinétique, ondes acoustiques, électrostatique, optique géométrique</i>	238	253
Physique et Modélisation	Étude d'un générateur houlomoteur en vue d'un contrôle optimal. <i>mécanique des fluides, transformée de Fourier, conversion de puissance, mécanique</i>	271	289

### FORMULAIRES

Constantes chimiques	312
Constantes physiques	315
Formulaire d'analyse vectorielle	316
Classification périodique	320

# Sommaire thématique de chimie

2015 – 2021

e3a MP Physique et Chimie (2021)	•			•		•	•								
e3a PC Physique et Chimie (2021)	•	•	•				•		•						
e3a PSI Physique et Chimie (2021)		•		•	•										
CCINP MP Physique et Chimie	••	••	••	••	••	••	•••								•
CCINP PC Chimie	•••	••	•••	•••	•	•	•••	••	•••	•••	•••	••	••		
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie			•						•						•••
CCINP PSI Physique et Chimie	•	••		•••	••	••	•	••							
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	•	••				••								
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	••	••	••	•	••	••								
Centrale PC Chimie	••	••	••	••	••	••	••	••	•••	••	••	••			
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	•		•			•								
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•	••	••	•••	••	••	•••	•							
Mines MP Chimie	•••	••	•	•••	••	••	•••								
Mines PC Chimie	•••	••	••	••	••	•	•••	•	•••	••	•				
Mines PSI Chimie	•••	••	•	•••	••	••	•••	••							
X/ENS PC Chimie		••	••	••		•	••	•	•••	••	••	••			
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination	Informatique pour tous			

SESSION 2021



PSI9PC

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

---

**PHYSIQUE-CHIMIE****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont autorisées.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants, un de physique un de chimie.**

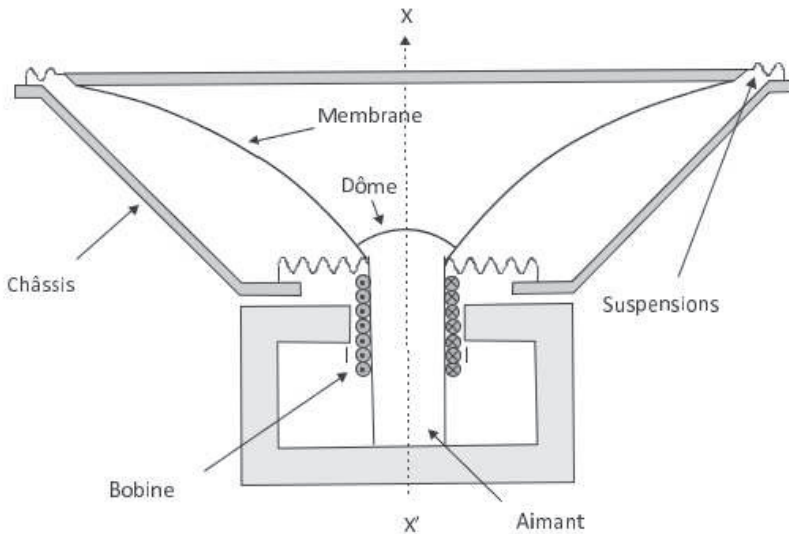
- Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans l'évaluation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fautive ne sont pas comptabilisés.

## PROBLÈME 1

### Étude d'un haut-parleur électrodynamique

#### A - Étude générale

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe  $(X'X)$ , de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction  $(X'X)$  normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique  $x(t)$ , elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur  $k$ . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ . On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.



**Figure 1** - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial  $\vec{B}$ , uniforme en norme, normal à  $(X'X)$ , créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la **figure 2**. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.)  $E(t)$  délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur  $\ell$  qui se déplace de  $x(t)$ . Cette grandeur  $x(t)$  représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur  $\ell_0$ . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note  $m_T$  la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe  $z$ , l'axe  $x$  étant horizontal. On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base des vecteurs unitaires de la **figure 2**.

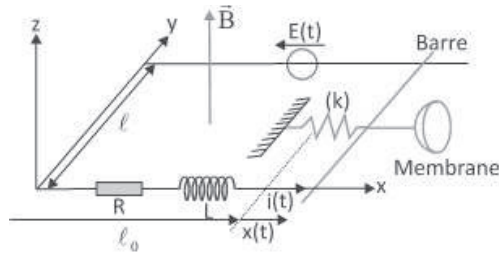


Figure 2 - Configuration des rails de Laplace de l'étude

**Q1.** Montrer que la f.é.m. induite  $e$  dans le cadre vaut  $e = -B\ell v(t)$  où  $v(t)$  est la vitesse, dérivée de  $x(t)$ .

**Q2.** Dédire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera  $i(t)$  le courant induit dans ce circuit.

**Q3.** Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse  $m_T$ . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

**Q4.** Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

**Q5.** Comparer la puissance de la f.é.m.  $P_{fem} = ei$  à la puissance de la force de Laplace  $P_L$ .

**Q6.** Le générateur délivre une tension sinusoïdale  $E(t)$  de pulsation  $\omega$ . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles  $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ ,  $E(t)$  s'identifiant alors avec la partie réelle de  $\underline{E}(t)$ . Montrer que l'on a  $\underline{E} = (R + jL\omega + Z_m)\underline{i} = Z_m \underline{i}$  où  $\underline{i}$  est le courant complexe traversant le circuit et  $Z_m$  est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T, \omega$  et  $k$ .

**Q7.** Montrer que l'admittance motionnelle  $Y_m = 1/Z_m$  peut s'écrire sous la forme :

$$Y_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} .$$

Donner l'expression des termes  $R_m, C_m$  et  $L_m$  en fonction de  $B, \ell, \alpha, m_T$  et  $k$ .

**Q8.** Dédire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement  $\eta$  du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

**Q9.** Montrer que la relation établie à la question Q4. devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle .$$

Commenter ce résultat.



## e3a Physique et Chimie PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE); il a été relu par Thomas Dupic (ENS Ulm) et Jacques Ding (École Polytechnique).

---

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants, un de physique, un de chimie.

- Le premier problème est consacré au haut-parleur électrodynamique. Après une description de son principe général de fonctionnement, on s'intéresse aux modes propres de vibration de la membrane, en lien avec les figures historiques de Chladni. Puis on propose d'étudier le rôle des filtres électriques répartiteurs. Enfin, on analyse la propagation des ondes sonores émises par le haut-parleur dans l'air, dans le cadre de l'approximation acoustique.
- Le deuxième problème constitue la partie chimie de l'épreuve et a pour thème l'eau de Javel. Il est scindé en deux sous-parties qui ne sont pas indépendantes. La première étudie le diagramme potentiel-pH du chlore, la seconde est un dosage rédox d'un berlingot concentré d'eau de Javel.

Ce sujet, assez varié dans les thématiques abordées, comporte de nombreuses questions très proches du cours, qu'il convient d'appliquer simplement. Il permet de réviser le phénomène d'induction électromagnétique, le filtrage linéaire, l'oxydo-réduction (sup) ou la propagation d'ondes sonores dans les fluides (spé). D'autres parties plus originales, sur les figures de Chladni par exemple, nécessitent davantage de réflexion ou de calculs. Notons quelques formulations malheureuses et un manque de précision de la part de l'énoncé, par exemple dans la description du degré chlorométrique de l'eau de Javel, ce qui a pu gêner les candidats pendant l'épreuve.

## INDICATIONS

### Problème I

3 La barre est soumise à la force de Laplace

$$\vec{F}_L = \int_0^\ell i \, dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z$$

10 En notation complexe, les moyennes s'écrivent  $\langle v^2 \rangle = \underline{v} \underline{v}^* / 2$  et  $\langle i^2 \rangle = \underline{i} \underline{i}^* / 2$ .

13 L'énoncé comporte une coquille : la deuxième équation différentielle à trouver est

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \beta^2 Y = 0$$

18 Exprimer le module de la fonction de transfert puis déterminer les coefficients  $a_i$  strictement positifs tels que  $H_b(x) = 1/\sqrt{1+x^6}$ .

19 Le montage de la figure 6 comporte une erreur : il ne devrait pas y avoir de fil reliant la tension d'entrée à la masse.

29 Montrer que la résultante des forces de pression sur la membrane s'exprime

$$\vec{F}_p = -P_1 S \vec{e}_x$$

30 Par définition,  $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ .

32 Démontrer que

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{P_m v_m}{2}$$

et en déduire les amplitudes  $P_m$  et  $v_m$ , sachant que  $P_m = \underline{Z} v_m$ .

33 Exprimer  $\text{div } \vec{\Pi}$  en situation unidimensionnelle, puis utiliser les équations locales obtenues aux questions 23, 24 et 25.

### Problème II

41 Le dichlore gazeux est toxique.

42 Le volume de dichlore indiqué par le degré chlorométrique est exprimé en litres. Les conditions normales de température et de pression correspondent aux valeurs  $T = 0^\circ\text{C}$  et  $P = 1 \text{ atm}$ .

43 Le terme dismutation est ici employé pour une signification acidobasique.

44 Comment sont les domaines de  $\text{I}^-$  et de  $\text{ClO}^-$  dans les diagrammes E-pH ?

45 L'empois d'amidon forme un complexe stable avec le diiode  $\text{I}_2$ .

## I. ÉTUDE D'UN HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

**1** La loi de Faraday s'écrit

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

avec  $\varphi$  le flux du champ magnétique à travers la surface  $\Sigma$  du cadre, orientée selon  $+\vec{e}_z$  d'après la figure 1. Le champ  $\vec{B}$  étant uniforme,

$$\varphi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl(\ell_0 + x(t))$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d[Bl(\ell_0 + x(t))]}{dt} \\ &= -Bl\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

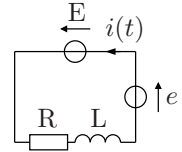
soit

$$\boxed{e = -Blv}$$

On a uniquement tenu compte du flux magnétique extérieur. Le flux propre est pris en compte dans la suite, par l'intermédiaire de l'inductance propre de la bobine.

**2** Représentons le circuit électrique équivalent, en prenant soin d'orienter la force électromotrice induite  $e$  dans le même sens que le courant. D'après la loi des mailles,

$$e + E = Ri + L\frac{di}{dt}$$



Avec la question 1,

$$\boxed{E = Ri + L\frac{di}{dt} + Blv} \quad (\text{E.E.})$$

**3** On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'ensemble {barre + haut-parleur} est soumis à :

- son poids  $\vec{P} = m_T \vec{g}$  ;
- la réaction du support  $\vec{R}$ , selon  $\vec{e}_z$  en l'absence de frottement solide ;
- la force de rappel  $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$  exercée par le ressort ;
- la force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$  ;
- la force de Laplace

$$\vec{F}_L = \int_0^\ell i \, dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = i\ell B \vec{e}_x$$

La projection de la 2<sup>e</sup> loi de Newton appliquée au système selon  $\vec{e}_x$  s'écrit

$$\boxed{m_T \frac{dv}{dt} = -kx - \alpha v + i\ell B} \quad (\text{E.M.})$$

4 Afin de faire apparaître des quantités homogènes à des puissances, multiplions (E.E.) par  $i$  et (E.M.) par  $v$  :

$$\begin{cases} Ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + B\ell v i \\ m_{\text{T}} v \frac{dv}{dt} = -kxv - \alpha v^2 + i\ell Bv \end{cases}$$

On égalise les deux expressions de  $B\ell v i$  :

$$Ei - Ri^2 - Li \frac{di}{dt} = m_{\text{T}} v \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} + \alpha v^2$$

soit

$$Ei = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_{\text{T}} v^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 + \alpha v^2$$

Au vu des termes apparaissant dans ce bilan, la puissance  $Ei$  fournie par le générateur est **en partie convertie au système sous forme cinétique, potentielle et magnétique, en partie dissipée par effet Joule  $Ri^2$  et par les frottements fluides  $\alpha v^2$ .**

Le terme  $\alpha v^2$  correspond à la puissance de l'onde sonore émise par le haut-parleur, comme on le verra dans les parties suivantes.

5 D'après la question 1,

$$P_{\text{fem}} = ei = -\ell Bv i$$

La puissance de la force de Laplace s'écrit

$$P_{\text{L}} = \vec{F}_{\text{L}} \cdot \vec{v} = i\ell Bv$$

De fait,

$$P_{\text{fem}} + P_{\text{L}} = 0$$

Ceci traduit le couplage électromécanique parfait au sein du dispositif.

6 Les équations différentielles (E.M.) et (E.E.) sont linéaires : pour une entrée  $E(t)$  en régime sinusoïdal forcé, il est aussi licite d'utiliser la notation complexe pour  $x(t)$ . Or, dériver un signal par rapport au temps revient à le multiplier par  $j\omega$  en formalisme complexe :  $\underline{v} = j\omega \underline{x}$ . L'équation (E.M.) se réécrit alors

$$j\omega m_{\text{T}} \underline{v} = -\frac{k}{j\omega} \underline{v} - \alpha \underline{v} + i\ell B$$

d'où

$$\underline{v} = \frac{\ell B}{\alpha + j\omega m_{\text{T}} + k/(j\omega)} i$$

Injectons cette expression dans l'équation (E.E.) passée en notation complexe

$$\begin{aligned} \underline{E} &= R\underline{i} + jL\omega \underline{i} + B\ell \underline{v} \\ &= \left[ R + jL\omega + \frac{(B\ell)^2}{\alpha + j\omega m_{\text{T}} + k/(j\omega)} \right] \underline{i} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_{\text{m}}) \underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{m}} = \frac{(B\ell)^2}{\alpha + j\omega m_{\text{T}} + k/(j\omega)}$$

## CCINP Physique et Chimie PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Steve Arnefaux (professeur en CPGE) et Alexandre Hérault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Arthur Alexandre (ENS Paris-Saclay), Émilie Frémont (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

Le sujet s'intéresse à quelques phénomènes naturels et environnementaux. Ses six parties sont totalement indépendantes.

- La première partie est consacrée à l'étude des mouvements du sol. On présente tout d'abord un dispositif mécanique pouvant mesurer les vibrations des sols : le sismographe. L'étude de cet outil amène à revenir sur les notions de filtrage mécanique. Ensuite, les résultats obtenus par cet instrument sont transformés en signaux électriques et numérisés. On s'intéresse alors aux conséquences de la numérisation à travers deux expériences : la première montre l'influence de la durée d'acquisition du signal sur la résolution spectrale et la seconde utilise un montage électrocinétique permettant de translater les fréquences afin de les observer sans modifier la résolution spectrale.
- La partie II, très courte, aborde le phénomène d'eutrophisation au sein d'un milieu aquatique et fait appel au cours sur les solutions aqueuses.
- Dans la partie III, on étudie la composition et la fonte de la banquise. Après quelques questions de chimie sur l'exploitation d'un diagramme binaire, cette partie se termine par une question où l'on doit faire preuve d'autonomie pour estimer la montée du niveau de la mer si la banquise était amenée à fondre entièrement.
- La quatrième partie modélise une tornade. Elle commence par des questions classiques sur le cours d'électromagnétisme (équations de Maxwell, démonstration de l'équation de conservation de la charge). Ensuite, les questions se focalisent sur la mécanique des fluides dans le but de déterminer la vitesse des vents en tout point de l'espace. Pour finir, on calcule la dépression causée par la tornade afin de vérifier s'il est nécessaire de coller les tuiles sur un toit.
- La partie V, très courte, s'intéresse à la photosynthèse chlorophyllienne et aux aspects thermochimiques de cette réaction.
- La partie VI aborde le séchage des sols saturés en eau. Une étude thermodynamique permet d'aboutir à une équation différentielle sur la position de l'interface sol sec - sol humide. La résolution de cette dernière permet de calculer la durée de séchage en fonction de la hauteur du sol et de montrer que deux phénomènes entrent en compétition : la diffusion et l'évaporation.

Le sujet est vaste et demande d'utiliser beaucoup de notions de première et de deuxième année. Le niveau de difficulté des questions est variable mais cela reste progressif dans chaque partie. Les quelques questions de chimie sont triviales et ne résultent que de l'application directe du cours.

## INDICATIONS

### Partie I

- 3 Le module de la fonction de transfert correspond au rapport de l'amplitude  $U$  et de l'amplitude  $Z_0$ .
- 4 Déterminer le domaine de fréquences pour que le module de la fonction de transfert s'approche de l'unité.
- 5 Exprimer le facteur de qualité et rappeler la condition de résonance.
- 9 Utiliser la loi des nœuds en termes de potentiels.
- 10 Penser à linéariser l'expression.

### Partie II

- 14 Déterminer tout d'abord la concentration de l'espèce minoritaire  $\text{PO}_4^{3-}$ .

### Partie III

- 16 L'abscisse du diagramme donné est le pourcentage massique en  $\text{NaCl}$ .
- 20 Déterminer le volume d'eau douce obtenu par la fonte de la banquise puis, sachant que la masse se conserve, calculer le volume immergé de celle-ci. La différence représente l'augmentation de volume. En supposant que ce volume se répartit uniformément, calculer la hauteur  $H$  de montée des eaux.

### Partie IV

- 23 L'analogie avec l'électromagnétisme est plus rapide mais demande plus d'aisance.
- 27 Considérer que la force causée par la dépression est verticale et comparer sa norme à celle du poids d'une tuile.

### Partie V

- 28 Équilibrer les éléments dans cet ordre : C puis H puis O.
- 30 Calculer le quotient réactionnel et le comparer avec la constante d'équilibre, qu'il n'est pas nécessaire de calculer précisément.

### Partie VI

- 34 Faire un bilan de matière dans un petit volume de longueur  $dz$  et de section  $S$ .
- 36 Attention, la quantité  $n_{\text{vap}}(z_m)$  ne représente pas un nombre de moles mais une densité particulaire.
- 40 Un petit oubli de l'énoncé : l'équation différentielle fait aussi intervenir  $S$ .
- 41 Il est plus simple d'utiliser un changement de variable  $Z = H - z_m$ . De plus,

$$Z \frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Z^2}{2} \right)$$

Le séchage est terminé lorsque  $Z = H$ .

- 43 Avec la figure 12, déterminer la hauteur  $H \simeq H_{\text{lim}}/10$  à partir de laquelle l'approximation linéaire n'est plus vérifiée.

## I. SÉISME

**1** Dans le référentiel galiléen  $(O, X, Y, Z, t)$  noté  $(R)$ , les forces qui s'appliquent sur la masse  $m$  sont :

- le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$  ;
- la force de rappel du ressort  $\vec{F}_r = k(h - z - \ell_0) \vec{e}_z$  ;
- la force due à l'amortisseur  $\vec{F}_a = -\lambda \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$ .

Dans ce référentiel, le principe fondamental de la dynamique pour la masse  $m$  s'écrit

$$m \frac{d^2(z_S + z)}{dt^2} \vec{e}_z = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_a$$

Projetons cette relation sur l'axe  $(OZ)$  :

$$\boxed{m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + k(h - z - \ell_0) - \lambda \frac{dz}{dt} - m \frac{d^2 z_S}{dt^2}}$$

En l'absence de séisme, la position  $z_S$  est constante. Déterminons la position d'équilibre de la masse  $m$  à partir de la relation précédente :

$$0 = -mg + k(h - z_{\text{eq}} - \ell_0)$$

Par conséquent,

$$\boxed{z_{\text{eq}} = h - \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

Avec l'expression de cette position, déterminons une équation différentielle vérifiée par l'écart de la masse par rapport à l'équilibre, noté  $u$ . Pour cela, passons par le changement de variable  $z = z_{\text{eq}} + u$  et relierons leurs dérivées :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Dans le principe fondamental de la dynamique, cela donne

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg + k(h - u - z_{\text{eq}} - \ell_0) - \lambda \frac{du}{dt} - m \frac{d^2 z_S}{dt^2}$$

ou encore

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{du}{dt} + \frac{k}{m} u = -g + \frac{k}{m} (h - z_{\text{eq}} - \ell_0) - \frac{d^2 z_S}{dt^2}$$

En utilisant l'expression de la position d'équilibre  $z_{\text{eq}}$ , la relation se simplifie

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{du}{dt} + \frac{k}{m} u = -\frac{d^2 z_S}{dt^2}}$$

**2** En régime sinusoïdal forcé, l'équation différentielle vérifiée par  $u$  devient

$$-\omega^2 \underline{u} + j \frac{\lambda}{m} \omega \underline{u} + \frac{k}{m} \underline{u} = \omega^2 \underline{z}_S$$

On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{z}_S} = \frac{\omega^2}{k/m - \omega^2 + j \lambda \omega / m}$$

ou encore

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{m \omega^2 / k}{1 - m \omega^2 / k + j \lambda \omega / k}}$$

Par identification avec les formes données, **le sismographe agit comme un filtre passe-haut du second ordre.**

On aurait aussi pu déterminer la valeur asymptotique de la fonction de transfert en basses et hautes fréquences :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = -1$$

**3** Le module de la fonction de transfert correspond au rapport de l'amplitude  $U$  et de l'amplitude  $Z_0$ . Ainsi,

$$|\underline{H}| = \frac{|m\omega^2/k|}{|1 - m\omega^2/k + j\lambda\omega/k|} = \frac{U}{Z_0}$$

soit

$$U = \frac{m\omega^2/k}{\sqrt{(1 - m\omega^2/k)^2 + (\lambda\omega/k)^2}} Z_0$$

**4** Réécrivons l'expression précédente en simplifiant par  $m\omega^2/k$  :

$$U = \frac{Z_0}{\sqrt{\left[k/(m\omega^2) - 1\right]^2 + \left[\lambda/(m\omega)\right]^2}}$$

On obtient l'égalité  $U = Z_0$  lorsque les termes  $k/(m\omega^2)$  et  $\lambda/(m\omega)$  sont négligeables devant 1. Donc

$$\omega^2 \gg \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \omega \gg \frac{\lambda}{m}$$

La condition sur la constante  $k$  du ressort implique que celle-ci doit être faible : **il s'agit d'une suspension qualifiée de souple.**

Le déphasage des vibrations s'obtient en déterminant l'argument de la fonction de transfert. Dans les conditions ci-dessus, elle se simplifie en

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{m\omega^2/k}{-m\omega^2/k} = -1$$

Ainsi,

$$\arg(\underline{H}) = \arg(-1) = \pm \pi$$

**La masse  $m$  vibre en opposition de phase avec le sol.**

**5** Pour un filtre du second ordre, il n'y a pas de résonance lorsque le facteur de qualité vérifie

$$\frac{1}{2\sigma} = Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour trouver l'expression du facteur de qualité, mettons la fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\left(j\omega\sqrt{m/k}\right)^2 H_0}{1 + j\lambda\omega/k + \left(j\omega\sqrt{m/k}\right)^2}$$



# CCINP Modélisation et Ingénierie numérique

## PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Courrier (professeur en CPGE) et Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Jérôme Didier (professeur en CPGE), Steve Arneaux (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

---

Ce sujet de modélisation s'intéresse à la climatisation d'un bâtiment. Ce n'est pas la production de l'air climatisé qui est abordée, mais l'effet de celui-ci sur la température des pièces du bâtiment.

- La partie I jouant le rôle d'introduction, une courte partie II, sans calculs, vérifie que l'on comprend l'utilité d'un système de climatisation ainsi que les contraintes qui jouent dans sa conception.
- La partie III, dans sa première moitié, fait estimer les performances maximales du système considéré au moyen de calculs simplifiés d'ordres de grandeur. Dans sa seconde moitié, elle décrit le fonctionnement de l'échangeur thermique, qui permet d'éviter des pertes trop importantes dues à la circulation de l'air entre l'intérieur et l'extérieur du bâtiment. On est amené à décrire l'échangeur comme une résistance thermique.
- Dans la partie IV, l'analogie électrique introduite en fin de partie III est détaillée et exploitée afin de modéliser mathématiquement le système et de le simuler numériquement. Elle se termine par l'implémentation d'un intégrateur numérique pour un système linéaire d'équations différentielles ordinaires.
- Dans la partie V, on s'intéresse au contrôle du débit d'air conditionné de la climatisation. On cherche les différentes relations entre la commande d'ouverture des volets via un moteur et le débit qui en résulte. Pour cela, on modélise la relation entre le débit d'air et l'angle d'ouverture des volets ainsi que celle entre l'angle de rotation du moteur de commande et celui des volets. On s'intéresse ensuite au modèle reliant l'angle d'ouverture des volets au couple moteur nécessaire pour obtenir cette ouverture, l'action de l'air étant négligeable.
- Dans la dernière partie, une fois que les modèles mécaniques précédents ont été établis, on s'intéresse à la mise en place de l'asservissement de température par la climatisation. Cette étude est tout à fait classique dans sa construction et s'intéresse aux trois performances d'un asservissement que sont la stabilité, la précision et la rapidité.

Le sujet est très accessible dans l'ensemble. Il ne nécessite que peu de bagage théorique en physique : le chapitre d'électronique et une partie de celui de thermodynamique. Il est donc globalement abordable dès la première année, à l'exception de la question 11 qui requiert des bilans de variations infinitésimales.

## INDICATIONS

### Partie III

- 8 L'efficacité du climatiseur, supérieure à 1, est le rapport entre la puissance thermique extraite et la puissance consommée pour ce faire. Utiliser cette relation pour exprimer cette dernière.
- 11 Considérer un volume d'air sortant, de masse  $dm$ , délimité par deux plaques consécutives et les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Commencer par écrire la quantité de chaleur échangée par ce volume d'air avec ceux de part et d'autre pendant le temps  $dt$  qu'il lui faut pour franchir l'abscisse  $x$ . Relier à l'aide du premier principe de la thermodynamique cette quantité de chaleur à l'évolution de la température du volume d'air initial. Conclure.
- 14 La solution de l'équation ne doit s'exprimer qu'en fonction de  $T_e$ ,  $T$ ,  $L$ ,  $\lambda$  et  $x$  : il faut donc éliminer  $T_{e/p}$  et  $T_{p/e}$ .
- 15 Identifier la puissance thermique à un courant électrique.

### Partie IV

- 17 Réfléchir à la disposition de l'échangeur et de la fenêtre entre la pièce et l'extérieur : sont-ils disposés en parallèle ou en série ?
- 28 Il faut bien penser à déterminer la différence entre les températures initiale et finale de la réponse indicielle pour pouvoir calculer le gain statique de la fonction de transfert  $H(p)$ .

### Partie V

- 31 Le code de la fonction dichotomie proposée retourne une des bornes de l'intervalle dichotomique considéré et non le milieu de celui-ci.
- 33 Les effets des actions de la pesanteur sont négligeables.

### Partie VI

- 35 Un asservissement est correctement réalisé lorsque la valeur en sortie du comparateur, appelé aussi écart, est nul pour des grandeurs d'entrée et de sortie identiques.
- 37 Déterminer les marges de gain et de phase du système en boucle ouverte.

## II. CONTEXTE ET SYSTÈME ÉTUDIÉ

**1** La consommation énergétique d'un bâtiment est principalement dédiée à sa régulation de température. Pour diminuer cette consommation, on peut :

- **renforcer l'isolation thermique du bâtiment**, afin de limiter les pertes de chaleur vers l'extérieur ;
- **adopter des solutions technologiques plus efficaces** comme des pompes à chaleur ou des systèmes de climatisation plus économes ;
- **exploiter les ressources du bâtiment lui-même**, par exemple utiliser l'énergie thermique dégagée par une salle de serveurs pour le chauffage ;
- **diminuer la valeur de consigne** (au détriment du confort des usagers) : moins chauffer en hiver et moins rafraîchir en été.

Une telle réponse n'était pas demandée, le sujet ne demandant que deux raisons. On aurait pu choisir n'importe lesquelles parmi celles-ci.

**2** Les humains respirent, consomment le dioxygène de l'air et rejettent du dioxyde de carbone, de l'humidité et des agents pathogènes comme des virus respiratoires. **Un renouvellement constant de l'air est donc nécessaire pour le maintenir respirable.**

Un récent épisode de pandémie d'une maladie pulmonaire a également démontré l'utilité de renouveler autant que possible l'air des espaces fermés afin de limiter les risques de contamination entre occupants de ceux-ci.

**3** Prenons une situation estivale typique où l'air extérieur est plus chaud que l'air intérieur, et où l'on veut maintenir la température intérieure basse. L'entrée directe d'air extérieur s'accompagnerait d'un apport de chaleur à l'intérieur du bâtiment, alors que l'on rejetterait dehors de l'air climatisé. L'échangeur de chaleur, en permettant le transfert de chaleur entre l'air entrant chaud et l'air sortant plus froid, **permet de faire rentrer de l'air moins chaud et donc d'améliorer les performances du système de climatisation.** L'argument, inversé, est le même en hiver lorsqu'il fait plus froid dehors que dedans. Autrement dit, c'est une manière de limiter la fuite thermique inhérente au renouvellement de l'air en effectuant un pré-refroidissement gratuit.

**4** Autoriser des débits différents dans chaque pièce permet d'**accommoder les préférences individuelles de différentes personnes** travaillant dans différents bureaux. Elle permet également de **couper la régulation de température de certaines pièces temporairement vides** pour faire des économies.

### III. ÉTUDE DES PRINCIPAUX ÉCHANGES THERMIQUES

5] À 24°C, pour une puissance totale de 125 W, le **rayonnement prend 28%** avec 35 W, **la conduction est à 8%** avec 10 W, 30 W représentent **24% pour la convection**, et enfin **l'évapo-transpiration, avec 40%** pour 50 W, est le mode de transfert thermique dominant.

6] Avec 125 W par personne, on a une puissance totale pour quatre personnes de

$$P_{\text{pers}} = 4 \times 125 = 500 \text{ W}$$

7] Utilisons la formule (2) avec les données du sujet :

$$P_{\text{clim,tot}} = D_{\text{m,tot}} c_P (T - T_c) = \frac{25 \cdot 10^3}{3600} \times 1,0 \cdot 10^3 \times (24 - 20) \approx 3 \cdot 10^4 \text{ W}$$

8] La puissance consommée par le climatiseur dans ces conditions est la puissance extraite divisée par l'efficacité du climatiseur.

$$P_{\text{consommée}} = \frac{P_{\text{clim,tot}}}{e_{\text{max}}} = \frac{3 \cdot 10^4 \times (28 - 20)}{20 + 273,15} \approx 800 \text{ W}$$

On observe ici qu'avec cette efficacité théorique de 36,6, chaque joule de travail utilisée par le climatiseur permettrait d'extraire 36,6 joules thermiques du bâtiment. En pratique, c'est probablement un peu moins, comme on le verra à la question suivante, mais c'est quand même remarquable : la puissance nécessaire à la climatisation du bâtiment entier dans ce cas est équivalente à celle consommée par un micro-ondes. Ce n'est toutefois pas une violation du premier principe de la thermodynamique puisqu'on ne crée pas ces 36,6 joules, on se contente de les déplacer.

9] Plusieurs raisons peuvent expliquer cette efficacité inférieure à l'efficacité théorique. D'une part, **la nécessité de renouveler l'air du bâtiment** s'accompagne d'un échange de chaleur entre l'extérieur et l'intérieur, dans le sens inverse à ce qui est désiré, qu'il faut donc compenser. D'autre part et surtout, **l'hypothèse de réversibilité est difficile à atteindre** en pratique, les rendements réels sont donc inférieurs aux rendements théoriques.

10] La puissance thermique apportée à la pièce peut s'exprimer comme la **différence entre la puissance thermique apportée par l'air entrant, et celle emportée par l'air sortant**, ce qui justifie l'expression donnée pour  $P_{\text{ren}}$ . C'est la conséquence du premier principe industriel de la thermodynamique appliqué à la pièce.

11] Considérons le volume d'air sortant de masse  $dm$  délimité par deux plaques consécutives et par les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Ce volume est initialement à la température  $T_{\text{FS}}(x)$ . Pendant le temps  $dt$  qu'il lui faut pour franchir entièrement l'abscisse  $x$ , ce volume échange de la chaleur avec les flux entrants qu'il croise, en haut et en bas. La quantité de chaleur algébrique étant entrée dans le volume d'air peut s'écrire

$$\delta Q = 2 K_{\text{th}} dx [T_{\text{FE}}(x) - T_{\text{FS}}(x)] dt$$

## Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Steve Arnefaux (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE); il a été relu par Valentin Quintana Leyton (École Polytechnique) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

Ce sujet a pour thème l'incendie de la cathédrale Notre-Dame de Paris du 15 avril 2019. Il est divisé en trois parties indépendantes dans lesquelles se mêlent physique et chimie.

- La partie I est consacrée à l'étude de la combustion qui a eu lieu lorsque la charpente, constituée de poutres de chênes centenaires, a entièrement brûlé. On s'intéresse dans un premier temps au rôle de la température dans le triangle du feu avant de se pencher sur la chimie de la combustion. En dernier lieu, les questions se focalisent sur la propagation de l'énergie thermique dans une poutre de bois par conduction thermique. On cherche à vérifier si le modèle adopté est suffisant pour rendre compte de cet incendie.
- La partie II, qui ne comprend que des questions de chimie, traite de l'élément plomb à travers l'étude thermodynamique de son oxydation dans un premier temps, puis sa détection dans un second temps.
- Dans la partie III, on s'intéresse au dispositif mis en place pour éteindre le feu grâce à des lances à incendie. Une première sous-partie présente l'intérêt d'utiliser de l'eau pour combattre un feu. Dans la seconde sous-partie, on étudie plus spécifiquement l'alimentation en eau des lances de pompiers. On tient alors compte de la hauteur de la nacelle d'où l'eau est envoyée sur les flammes. Sans qu'il n'y ait de développement calculatoire excessif, on s'intéresse aux pertes de charge régulières dans l'écoulement à l'intérieur d'une lance à incendie. Cette partie se termine par une estimation de la quantité d'eau utilisée pour maîtriser cet incendie hors norme.

De difficulté modérée et de longueur raisonnable, ce sujet aborde des thématiques dans différents domaines. De plus, la partie physique propose trois questions non guidées, abordables et intéressantes, signalées dans l'énoncé par une barre verticale. Dans sa construction, ce sujet est un bon entraînement aux épreuves du Concours CentraleSupélec.

## INDICATIONS

### Partie I

- 3 Déterminer la taille de l'image du Soleil sur la feuille. Ensuite, appliquer le premier principe de la thermodynamique.
- 5 Chercher une formule brute de la forme  $\text{CH}_x\text{O}_y$  et exprimer les rapports des masses des différents éléments en fonction de  $x$ , puis de  $y$ .
- 6 Considérer les produits gazeux.
- 7 L'enthalpie de réaction correspond à un PCI molaire au lieu de massique. Attention au signe : la combustion est exothermique.
- 8 Écrire les équations de réaction des combustions des gaz de pyrolyse et calculer les enthalpies standard de réaction correspondantes. Utiliser ensuite la formule brute du bois pour réaliser une combinaison linéaire adaptée des valeurs obtenues.
- 14 Penser à raisonner avec les dimensions pour déterminer les deux durées.
- 16 Relier les dérivées partielles de  $T(x,t)$  aux dérivées de  $\theta(u)$ .
- 18 Utiliser les conditions aux limites.
- 20 La température dans la poutre est une grandeur continue.
- 21 Identifier la grandeur  $x$  de la fonction  $x \mapsto \ln(1-x)$  avec l'équation donnée et remarquer que  $T_c - T_\infty = 2(T_i - T_\infty)$ .

### Partie II

- 23 Utiliser la masse volumique du plomb.
- 28 Considérer l'effet d'une diminution de la pression à partir d'un état d'équilibre.
- 29 Sur la figure 3, l'équilibre entre deux solides correspond à la droite frontière entre les deux domaines correspondants.
- 30 Déterminer dans quel domaine de la figure 3 on se situe.
- 32 L'électron excité revient au niveau K lors de la désexcitation : on cherche donc l'énergie des transitions  $K_\alpha$  et  $K_\beta$ .

### Partie III

- 34 S'intéresser au signe de  $\Delta_r G^\circ$  pour la réaction de décomposition de l'eau.
- 38 En négligeant les frottements, il est possible d'étudier les particules du jet d'eau comme étant en chute libre et lancées avec un vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_e$ .
- 40 Appliquer le théorème de Bernoulli.
- 41 Calculer le nombre de Reynolds  $R_e$ .
- 43 Les données du tableau permettent de calculer la perte de charge linéique J.
- 46 Déterminer la différence de pression  $\Delta P_{\text{pompe}}$  entre la sortie et l'entrée de la pompe. En déduire la puissance mécanique nécessaire si celle-ci fournit un débit Q.

## I. LE FEU

**1** La loi d'Arrhenius relie la constante de vitesse d'une réaction chimique, notée  $k$ , à la température :

$$k = \mathcal{A} \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right)$$

avec  $\mathcal{A}$  le facteur pré-exponentiel (de même dimension que  $k$ ),  $E_a$  l'énergie d'activation,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $T$  la température.

On a  $E_a > 0$  pour la plupart des réactions chimiques, de sorte que la vitesse augmente généralement lorsque l'on élève la température.

**2** Le contact entre comburant et combustible est plus aisé en phase gaz. La capacité thermique des gaz est également généralement plus faible que celle des autres phases, ce qui facilite l'élévation de température nécessaire à l'amorçage. Il devrait être plus aisé d'amorcer la combustion pour les **gaz**.

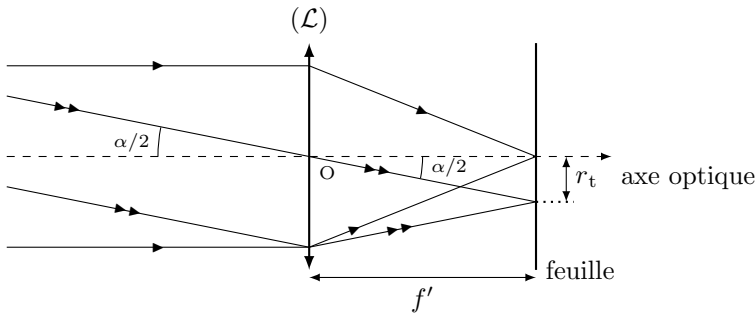
**3** Déterminons la puissance reçue par la loupe, dirigée vers le Soleil, lorsqu'elle est éclairée par un flux surfacique moyen  $\mathcal{E} = 800 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  supposé constant :

$$\mathcal{P}_{\text{loupe}} = \mathcal{E} \pi r^2$$

Une partie de la puissance étant absorbée par le verre de la loupe, seule 75% de cette puissance est transmise à la feuille :

$$\mathcal{P}_t = 0,75\mathcal{P}_{\text{loupe}} = 0,75 \mathcal{E} \pi r^2 = 0,75 \times 800 \times \pi \times (5 \cdot 10^{-2})^2 = 4,7 \text{ W}$$

Cette puissance est ensuite concentrée sur une surface  $s$  beaucoup plus petite que la surface de la loupe grâce à la lentille convergente. Détaillons la situation :



La lentille  $\mathcal{L}$  forme une image nette du Soleil, situé à l'infini, dans son plan focal image. On y place la feuille afin d'obtenir la plus petite tâche possible de rayon  $r_t$ . Cette grandeur s'obtient géométriquement par la relation

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_t}{f'}$$

Avec  $\alpha \ll 1$ ,

$$r_t \simeq \frac{\alpha f'}{2}$$

Ainsi, la surface  $s$  de l'image est égale à

$$s = \pi r_t^2 = \pi \left(\frac{\alpha f'}{2}\right)^2 = \pi \times \left(\frac{(32/60) \times (\pi/180) \times 10 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2 = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

Appliquons maintenant le premier principe de la thermodynamique à la masse  $\sigma s$  que représente un échantillon de surface  $s$  de cette feuille :

$$dU = \sigma s c dT = \mathcal{P}_t dt$$

En supposant que la puissance transmise  $\mathcal{P}_t$  est constante pendant la durée de l'expérience  $\tau$  et que la surface  $s$  est fixe, il vient

$$\sigma s c \Delta T = \mathcal{P}_t \tau$$

Ainsi, en posant  $T_0$  et  $T_i$  les températures respectives de la feuille à l'état initial et celle de son auto-inflammation, la durée minimale pour la brûler est égale à

$$\tau = \frac{\sigma s c (T_i - T_0)}{\mathcal{P}_t} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \times 6,8 \cdot 10^{-7} \times 1,4 \cdot 10^3 \times (232 - 20)}{4,7} = 4,3 \text{ ms}$$

**4** Dans le raisonnement précédent, on a supposé que toute l'énergie reçue par la feuille permet d'augmenter sa température. En réalité, une partie de cette énergie est réfléchiée et rayonnée, diminuant ainsi la quantité  $\mathcal{P}_t$  absorbée par le système. De plus, la lentille ne possède pas un stigmatisme rigoureux et l'énergie absorbée est probablement diffusée, ce qui a pour conséquence d'augmenter la surface  $s$  réelle à chauffer. Finalement, **la durée réelle nécessaire à l'auto-inflammation de la feuille est plus importante.**

Le choix du papier noir est judicieux car **il permet d'augmenter la proportion d'énergie absorbée par la feuille.** En effet, une feuille blanche réfléchit davantage d'énergie par rapport à une feuille noire.

Les couleurs foncées absorbent mieux la lumière et deviennent plus rapidement chaudes que les couleurs claires. Ce phénomène est aisément observable lorsqu'il y a du Soleil en été et que l'on porte un haut sombre.

**5** Cherchons une formule brute de la forme  $C_1H_xO_y$  et utilisons les pourcentages massiques donnés par l'énoncé (on note  $M_i$  la masse molaire de l'élément  $i$  et  $m_i$  la masse de cet élément dans un échantillon de bois) :

$$\frac{m_H}{m_C} = \frac{x M_H}{1 \times M_C} = \frac{6}{50}$$

soit

$$x = \frac{6}{50} \frac{M_C}{M_H} = \frac{6}{50} \times \frac{12}{1} = 1,44$$

De même,

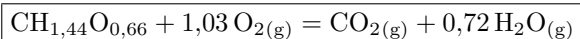
$$\frac{m_O}{m_C} = \frac{y M_O}{1 \times M_C} = \frac{44}{50}$$

d'où

$$y = \frac{44}{50} \frac{M_C}{M_O} = \frac{44}{50} \times \frac{12}{16} = 0,66$$

On trouve bien la formule brute  $CH_{1,44}O_{0,66}$  proposée.

**6** L'équation de la combustion du bois s'écrit





## Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Arthur Alexandre (ENS Paris-Saclay) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

Ce sujet de physique-chimie a pour objet l'étude d'un modèle particulier d'éolienne (Darrieus de type H) pour lequel l'axe de rotation des pales est vertical, et non horizontal comme c'est le cas pour une éolienne classique. Les trois premières parties abordent différents problèmes de physique liés à la conversion de puissance et à la production d'énergie électrique par l'éolienne. La quatrième et dernière est consacrée à la chimie et s'intéresse plus particulièrement aux aimants des rotors de l'éolienne.

- La première partie est consacrée aux enjeux énergétiques liés au remplacement des véhicules actuels par des véhicules électriques, ainsi qu'à la construction de parcs éoliens pour répondre à la demande énergétique. Elle ne comporte que deux questions, qui nécessitent de prendre des initiatives en s'appuyant sur les documents fournis à la fin de l'énoncé.
- Dans la partie II, on s'intéresse à la conversion d'énergie cinétique transportée par l'air en énergie mécanique de rotation. Après avoir mis en évidence la vitesse apparente du vent, on détermine le couple des forces exercées par le vent, puis on estime la puissance moyenne transférée au rotor.
- Dans la troisième partie, on étudie la production d'électricité par le générateur. Cette partie demande de la réflexion ; elle utilise des notions d'électromagnétisme et de conversion électromécanique de puissance.
- Dans la quatrième et dernière partie, dédiée à la chimie, on s'intéresse aux aimants des rotors constitués d'un alliage contenant du néodyme et du fer. L'oxydoréduction est le thème principal de cette partie, particulièrement la corrosion du fer. On utilise des diagrammes potentiel-pH fournis, ainsi que des courbes courant-potentiel dont on doit proposer l'allure.

La difficulté de ce sujet est modérée. Plusieurs résultats intermédiaires sont donnés, ce qui permettait d'espérer traiter l'intégralité du sujet dans le temps imparti.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 On pourra s'aider de la conversion de Mtep en J donnée à la fin du document réponse. De plus, pour estimer l'énergie consommée par l'ensemble des véhicules électriques sur une année, on pourra s'appuyer sur le document 3 donné à la fin de l'énoncé et estimer l'aire sous l'une des trois courbes proposées.
- 2 Pour le calcul de la surface du champ éolien, on peut supposer que les éoliennes sont réparties sur un maillage carré.

### Partie II

- 3 Pour calculer la puissance moyenne, on peut utiliser le tableau 1 puis vérifier que le résultat est cohérent avec les données de la figure 2.
- 6 On pourra déterminer séparément  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  en exprimant respectivement  $\vec{w} \cdot \vec{e}_\theta$  et  $\vec{w} \cdot \vec{e}_r$ , à chaque fois de deux manières différentes.
- 7 Calculer la dérivée de  $\tan(\alpha(\theta))$  et déterminer les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles cette dérivée s'annule.
- 8 Calculer le nombre de Reynolds en utilisant les indications de l'énoncé.
- 10 Utiliser l'approximation  $\alpha \ll 1$  et écrire  $\sin \alpha \approx \alpha$  et  $\tan \alpha \approx \alpha$ .
- 15 Mesurer la période du signal sur le graphique de la figure 7 et vérifier que l'on obtient bien  $2\pi/3$ .
- 16 Considérer maintenant  $C_D \neq 0$  et calculer le moment de la force de traînée.

### Partie III

- 18 Déterminer la courbe  $B(\theta)$  en superposant les contributions des deux spires.
- 22 Utiliser l'approximation  $e \ll D_i$  ainsi que des formules trigonométriques données à la fin du document réponse.
- 25 Vérifier que les expressions proposées sont en accord avec la loi de Faraday.
- 26 Calculer le module des équations obtenues en appliquant la loi des mailles aux deux circuits électriques.
- 27 Reprendre les expressions obtenues aux questions 21 et 23 et injecter l'expression de  $I_s$  déterminée à la question 26.
- 28 Considérer qu'il n'y a pas de pertes énergétiques dans l'entrefer et que toute l'énergie mécanique du rotor est convertie en énergie électrique.

### Partie IV

- 32 Utiliser le diagramme E-pH pour déterminer les produits d'oxydation dans les deux cas. Tant que les domaines sont disjoints l'oxydation se poursuit. Il faut calculer le potentiel standard du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}$ .
- 33 Trouver dans quelle zone de l'eau le potentiel est le plus faible. Les électrons remontent les potentiels dans le métal.
- 34 Déterminer les potentiels pour lesquels les intensités anodique et cathodique deviennent non nulles, en utilisant les surtensions éventuelles. Les courbes étant symétriques, le potentiel de corrosion se situe à égale distance de ces deux valeurs.
- 35 Dans l'eau de mer, la circulation du courant est plus aisée.
- 36 Décomposer le raisonnement en plusieurs étapes et déterminer les grandeurs suivantes, dans cet ordre : volume de nickel déposé, quantité de matière de nickel, quantité de matière d'électrons puis durée en utilisant la charge et l'intensité.

## I. ENJEUX ÉNERGÉTIQUES

**1** Il s'agit de calculer l'énergie supplémentaire  $E_{\text{élec}}$  consommée sur une année si tous les véhicules actuels en France étaient remplacés par des véhicules électriques. On note  $E_{\text{actuel}}$  et  $E_{\text{élec}}$  l'énergie consommée respectivement par l'ensemble des véhicules actuels et par l'ensemble des véhicules électriques. Le document 1 indique l'énergie consommée en France sur une année par le secteur des transports : 43,8 Mtep (que l'on peut convertir en J en utilisant la donnée du formulaire). Il est aussi mentionné la part énergétique consommée par les voitures particulières :  $0,62 \times 0,8$ . On trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{actuel}} &= 43,8 \times 0,62 \times 0,8 \\ &= 21,7 \text{ Mtep} = 9,1 \times 10^{17} \text{ J} \end{aligned}$$

Pour calculer  $E_{\text{élec}}$ , on utilise les données des documents 1 et 3. Le graphique du document 3 donne la puissance de charge nécessaire d'un million de véhicules électriques en fonction du temps sur une journée. Pour déterminer l'énergie consommée, il faut estimer l'aire sous la courbe. Pour cela, on peut utiliser une méthode, certes grossière, qui consiste à estimer la hauteur d'une droite horizontale telle que l'aire sous la courbe et au-dessus de la droite est égale à celle au-dessus de la courbe et en-dessous de la droite. Quelle que soit la courbe considérée, cela donne une puissance moyenne nécessaire  $P_{\text{moy}} \approx 300 \text{ MW}$  sur une journée, pour un million de véhicules. Le document 1 donne le nombre total de véhicules en circulation :  $32,5 \cdot 10^6$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} E_{\text{élec}} &= 300 \cdot 10^6 \times 3\,600 \times 24 \times 365 \times 32,5 \\ &= 3,1 \times 10^{17} \text{ J} = 85 \text{ TWh} \end{aligned}$$

Pour estimer l'aire sous la courbe du graphique du document 3, on peut utiliser la méthode des rectangles, mais cela peut prendre beaucoup de temps.

Finalement, on trouve que le supplément énergétique annuel engendré par un remplacement des voitures actuelles par des véhicules électriques est

$$\Delta E = E_{\text{élec}} - E_{\text{actuel}} = -6,0 \cdot 10^{17} \text{ J} = -14,4 \text{ Mtep}$$

La conversion au tout électrique entraînerait une baisse de la consommation énergétique. Les moteurs électriques sont donc plus efficaces énergétiquement que les moteurs thermiques. Étant donné que les sources de production énergétique sont différentes (diesel, essence/électricité), **la conversion au tout électrique suppose de créer de nouvelles unités de production électrique.**

Estimons le nombre de réacteurs nécessaires pour produire  $E_{\text{élec}}$ . Étant donné que la puissance d'un réacteur de centrale nucléaire est de l'ordre du GW, cela correspond à une énergie produite sur un an de 8,8 TWh. Il faut donc environ environ 10 réacteurs pour produire  $E_{\text{élec}}$  sur une année, ce qui est évidemment très important.

**2** Pour évaluer la puissance crête, on s'appuie sur le document 3 où trois scénarios sont proposés. Le pic de charge des véhicules se situe vers 20 heures pour les trois scénarios. À cette heure, la puissance crête nécessaire à la recharge est de 850 MW dans le pire des scénarios pour 1 million de véhicules électriques. On trouve que la puissance crête nécessaire à la recharge de tous les véhicules électriques est

$$P_{\text{crête}} = 850 \cdot 10^6 \times 32,5 = 28 \text{ GW}$$

On souhaite à présent estimer la surface d'un champ éolien capable de produire cette puissance électrique. D'après les données du document 5, on trouve que l'ordre de grandeur de la puissance d'une éolienne est  $P_{\text{éolienne}} = 10 \text{ MW}$ . En prenant en compte le facteur de charge ou taux d'utilisation  $\eta = 0,25$ , le nombre d'éoliennes à construire est

$$N_{\text{éolienne}} = \frac{P_{\text{crête}}}{\eta P_{\text{éolienne}}} = 1 \cdot 10^4$$

L'ordre de grandeur obtenu est évidemment gigantesque, les grands parcs éoliens actuels possèdent environ  $10^2$  éoliennes.

Déterminons à présent l'ordre de grandeur de la surface nécessaire pour une éolienne. L'ordre de grandeur du diamètre du rotor est de 100 m. D'après le document 4, les éoliennes doivent être séparées d'environ 10 fois le diamètre du rotor. En supposant que les éoliennes sont réparties suivant un maillage carré, on obtient alors la surface nécessaire pour une éolienne :

$$S_{\text{éolienne}} = (100 \times 10)^2 = 10^6 \text{ m}^2 = 1 \text{ km}^2$$

La surface totale du parc éolien permettant d'assurer la production nécessaire à la recharge de tous les véhicules électriques est donc

$$S_{\text{total}} = N_{\text{éolienne}} \times S_{\text{éolienne}} \approx 10^4 \text{ km}^2$$

On obtient un ordre de grandeur gigantesque par rapport à la surface d'un parc éolien classique ( $\approx 10^2 \text{ km}^2$ ). Une solution « tout éolien » semble donc exclue. Il faut alors envisager une diversification de la production énergétique (hydraulique, solaire, ...). Dans tous les cas, cela reste un défi très important.

## II. CONVERSION ÉNERGIE ÉOLIENNE EN ÉNERGIE MÉCANIQUE - ÉOLIENNE TYPE DARRIEUS

**3** En utilisant les données du tableau 1, on détermine l'énergie produite par l'éolienne de type Darrieus sur une année  $E_{\text{moy}} = P_{\text{moy}} \Delta t$ , avec  $P_{\text{moy}}$  la puissance moyenne calculée en pondérant les données de puissance du tableau par les pourcentages de temps et  $\Delta t$  la durée d'une année exprimée en seconde. On trouve

$$P_{\text{moy}} = 867 \times 0,37 + 5\,320 \times 0,54 + 10\,236 \times 0,09 = 4,1 \text{ kW}$$

et

$$E_{\text{moy}} = 4,1 \cdot 10^3 \times 365 \times 24 \times 3\,600 = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ J} = 36 \text{ MWh}$$

Le résultat obtenu pour la puissance moyenne est cohérent avec le graphique de la figure 2. En effet, on peut estimer la vitesse moyenne du vent en regardant où se situe le pic de la courbe de mesures, c'est-à-dire pour environ  $v_{\infty} = 6 \text{ m.s}^{-1}$ . La puissance moyenne délivrée par l'éolienne pour cette vitesse est  $P_{\text{moy}} = 3 \text{ kW}$ , ce qui est en accord avec le résultat calculé.

# Mines Physique 1 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

---

Le sujet commence par une question sur la durée requise pour encoder en morse une page de texte. C'est le prétexte pour introduire les télécommunications, thème central du sujet.

- Dans la partie I, on s'intéresse à la propagation d'onde de courant et de tension dans un câble coaxial. Dans une première sous-partie, on étudie quelques conséquences des équations dites des télégraphistes. C'est l'occasion de déterminer une relation de dispersion et d'étudier la dispersion et l'atténuation. Ensuite, on aborde le modèle du câble coaxial vu en cours, puis on le complète en prenant en compte l'atténuation. Cette partie s'appuie sur des données numériques relatives à un câble de bonne qualité, dont on parvient à expliquer les caractéristiques grâce au modèle adopté.
- La deuxième partie, plus courte, cherche à rendre compte quantitativement de la possibilité de transmettre un signal électromagnétique « par-delà l'horizon » en utilisant le phénomène d'écho ionosphérique. L'ionosphère, qui est une couche importante de la haute atmosphère, peut en effet être modélisée comme un plasma peu dense qui peut, sous certaines conditions, réfléchir totalement une onde électromagnétique. Cette partie reste très proche du cours sur les plasmas peu denses.

Cette épreuve de longueur tout à fait raisonnable présente un ensemble cohérent centré sur les ondes. De nombreuses questions sont très accessibles. Notons également la présence de quelques applications numériques, à réaliser sans calculatrice mais qui ne présentent pas de difficulté majeure.

## INDICATIONS

### Partie I

- 2 Raisonner d'abord sur la dimension avant de donner l'unité. Ne pas chercher l'expression de la dimension à partir des dimensions fondamentales mais introduire la dimension d'une impédance/résistance. Commencer par déterminer la dimension de  $R_0$  et déduire celles des autres grandeurs ensuite.
- 5 La vitesse de phase est le rapport entre la pulsation et la partie réelle du vecteur d'onde.
- 6 La puissance est proportionnelle à la tension au carré : comment évolue  $u(z, t)$  quand  $z$  augmente ?
- 7 Rappelons qu'un tronçon élémentaire de câble coaxial de longueur  $dz$  est modélisé par une bobine élémentaire d'inductance  $\ell_u dz$  sur un fil et un condensateur élémentaire entre les deux fils de capacité  $c_u dz$ .
- 9 Pour retrouver l'expression de l'impédance caractéristique, chercher des solutions sous la forme d'une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des  $z$  croissants.
- 10 L'énoncé permet de traduire l'expression de l'onde de tension utilisée en l'écrivant sous la forme  $\bar{u}_+ = \bar{U}_+ e^{i(\omega t - kz)}$ . Traduire la condition en limite en  $z = 0$  avec l'onde totale  $\bar{u}_+ + \bar{u}_-$ .
- 11 Écrire  $u_s$  et  $u_p$  en notation complexe. Exprimer  $\bar{u}$  de deux façons : avec  $\bar{u}_s$  et  $\bar{u}_p$  d'une part et avec  $\bar{u}_+$  et  $\bar{u}_-$  d'autre part puis identifier. La grandeur  $\rho$  correspond au rapport des modules des amplitudes complexes de  $\bar{u}_s$  et  $\bar{u}_p$ .
- 12 Pour établir l'équation d'onde, utiliser la même démarche qu'à la question 7. On obtient, comme résultat intermédiaire, des équations analogues aux équations des télégraphistes données dans l'énoncé : identifier les constantes pour obtenir rapidement la distance d'atténuation à partir de la question 6.
- 14 Pour déterminer l'onde réfléchie, passer en notation complexe et traduire les conditions aux limites en  $z = 0$  à savoir la continuité de la tension et la loi des nœuds.

### Partie II

- 18 Pour une démonstration complète, il faut écrire l'égalité entre le champ électrique dans le vide (ondes incidente et réfléchie) et dans l'ionosphère. Si on ne tient pas compte de l'onde réfléchie, le résultat est bien le même mais il n'est pas rigoureux.
- 19 Injecter les résultats de la question précédente dans la relation de dispersion. La propagation n'est possible que si  $k_z'^2 > 0$ .
- 20 Faire un schéma en supposant un rebond sur l'ionosphère de la part de l'onde émise. En déduire l'expression de  $\tan \theta$  en fonction de  $d$  et  $H$ .
- 22 Adopter la notation complexe et écrire les équations de Maxwell. Éliminer le champ électrique pour obtenir l'équation de dispersion.
- 23 La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ . Comment est le vecteur d'onde dans le plasma dans le cas d'un écho ionosphérique ? Pour déterminer la puissance moyenne transmise à travers le plasma dans le cas d'un écho ionosphérique, il faut analyser le vecteur de Poynting moyen.

## I. LE FIL DU TÉLÉGRAPHE

**1** Attendu que  $2^5 = 32$ , 5 bits ne permet de coder que les 32 caractères de l'alphabet cyrillique, c'est donc insuffisant pour pouvoir coder en plus la ponctuation et les chiffres. En revanche, vu que  $2^6 = 64$ , **6 bits** sont suffisants pour coder un caractère (lettre, chiffre, ponctuation ou espace) d'un document écrit en cyrillique. En effet, pour coder  $N$  caractères en binaire sur  $n$  bits, avec  $n$  minimal, il faut que  $n$  vérifie

$$2^{n-1} + 1 \leq N \leq 2^n$$

À raison de 3 bits/s, il faut 2 s pour coder un caractère. Estimons le nombre de caractères dans une page de texte. En utilisant la page 2 de l'énoncé, on dénombre environ 40 lignes. En analysant les premières lignes de cette page, on peut retenir une moyenne de 90 caractères par ligne, soit 3 600 caractères pour une page. On en déduit qu'il faut environ **2 h** pour transmettre en morse une page de texte.

Il est important d'expliquer comment on détermine le nombre de caractères mais il ne faut pas perdre de temps à faire une analyse trop précise : en effet, c'est l'ordre de grandeur qui est utile et pour cela, que l'on retienne 30, 40 ou 50 lignes d'une part, 80, 90 ou 100 caractères par ligne d'autre part ne change rien à l'ordre de grandeur. L'avantage des valeurs retenues ici, c'est que le calcul pour obtenir la durée de transmission est instantané.

La capacité des cartouches de toner en terme de pages de texte est calculée avec 4 000 caractères par page environ : l'ordre de grandeur est bon.

**2** On a les équations des télégraphistes écrites sous la forme

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i \quad (1) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

On note  $[X]$  la dimension de la grandeur  $X$  et  $L, M, T$  les dimensions de base que sont les longueur, masse et temps. Sachant que le rapport d'une tension par une intensité a la dimension d'une impédance, notée  $[Z]$ , on obtient de l'équation (1)

$$\left[ \frac{R_0}{\ell_0} \right] = \left[ \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = [Z] L^{-1} \quad \text{et} \quad \left[ \frac{R_0}{\chi_0} \right] = \left[ \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = [Z] T L^{-1}$$

et de l'équation (2)  $[R_0 \chi_0] = [Z] L T^{-1}$

Comme  $R_0 \chi_0 \times R_0 / \chi_0 = R_0^2$ , on déduit que  $R_0$  a la dimension d'une impédance donc  **$R_0$  s'exprime en ohms**. Grâce à la 1<sup>re</sup> relation, on détermine que  $\ell_0$  a la dimension d'une longueur donc  **$\ell_0$  s'exprime en m**. Enfin, via la 3<sup>e</sup> relation, on conclut que  $\chi_0$  a la dimension d'une vitesse donc  **$\chi_0$  s'exprime en  $m \cdot s^{-1}$** .

**3** Le rôle du fil de « retour », absent dans une configuration à un seul fil, est joué par le sol. Le modèle bifilaire est donc toujours justifié.

Ce n'est pas la seule situation où il semble manquer un fil. On peut citer deux autres exemples :

- Pour une dynamo de vélo, il n'y a, en général, qu'un seul fil car c'est le cadre qui sert de masse.
- Dans le cadre de la transmission d'énergie électrique par courant triphasé, il n'y a que trois fils alors qu'il devrait y en avoir quatre. Le 4<sup>e</sup> fil (le neutre) est en fait inutile si le réseau est équilibré puisqu'alors la somme des courants est toujours nulle.

4 Pour obtenir l'équation vérifiée par  $u$ , il faut éliminer  $i$  des équations des télégraphistes. Pour cela, on calcule la dérivée partielle de l'équation (2) par rapport au temps et la dérivée partielle de l'équation (1) par rapport à  $z$ . Il vient

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} - \frac{1}{\ell_0 \chi_0} \frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial z} \end{cases}$$

En utilisant le lemme de Schwarz qui permet de permuter l'ordre des dérivations partielles et en remplaçant dans la 2<sup>e</sup> relation ci-dessus, il vient

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\ell_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}}$$

| On peut vérifier les dimensions de  $\chi_0$  et  $\ell_0$  déterminées à la question 2.

Pour déterminer la relation de dispersion, on cherche une solution sous forme d'une onde sinusoïdale progressive  $\bar{u}(z, t) = \bar{A} e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$  et on injecte dans l'équation de propagation. On obtient

$$-\bar{k}^2 \bar{u} = -\left(\frac{\omega}{\chi_0}\right)^2 \bar{u} + \frac{i\omega}{\ell_0 \chi_0} \bar{u}$$

On en déduit la relation de dispersion en divisant par  $\bar{u}$ :

$$\boxed{\bar{k}^2 = \left(\frac{\omega}{\chi_0}\right)^2 - \frac{i\omega}{\ell_0 \chi_0}}$$

5 Par définition de la vitesse de phase  $v_\varphi$ , on a

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\bar{k})}$$

On a donc besoin de l'expression de la partie réelle du vecteur d'onde en fonction de la pulsation. On procède à un développement limité à l'ordre le plus bas non nul en la perturbation. Ainsi, d'après la relation de dispersion réécrite sous la forme

$$\bar{k}^2 = \left(\frac{\omega}{\chi_0}\right)^2 \left[1 + \frac{i\chi_0}{\ell_0 \omega}\right]^2$$

on tire, par développement limité

$$\bar{k} = \left(\frac{\omega}{\chi_0}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i\chi_0}{\ell_0 \omega}\right)$$

d'où

$$\boxed{v_\varphi = \chi_0}$$

La vitesse de phase est une constante donc, à cet ordre du développement, **il n'y a pas de dispersion**.

| Insistons : il n'y a pas de dispersion si et seulement si  $\frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \ll 1$ .

6 Analysons l'évolution de  $u(z, t)$  quand  $z$  augmente, c'est-à-dire dans le sens de la propagation. Puisque l'on s'intéresse à des grandeurs énergétiques, il convient de passer en notation réelle. Comme

$$\bar{k} = \left(\frac{\omega}{\chi_0}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i\chi_0}{\ell_0 \omega}\right)$$

Il vient

$$\bar{u}(z, t) = \bar{A} e^{-\text{Im}(\bar{k})z} e^{i(\omega t - \text{Re}(\bar{k})z)}$$



## Mines Physique 2 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Baptiste Fraïsse (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Amélie Gay (ENS Lyon) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

---

Ce sujet porte sur une technique de mesure de la vitesse d'un écoulement : la vélocimétrie laser Doppler. Il est composé de trois parties indépendantes. La première étudie le principe de la mesure tandis que les suivantes portent sur deux applications.

- Dans la partie I, le sujet propose d'étudier un système de mesure de la vitesse d'un écoulement à partir de particules diffusantes qui l'ensemencent. Les notions abordées sont l'optique géométrique, l'électromagnétisme et l'effet Doppler.
- Dans la partie II, il s'agit de se pencher sur l'application du système précédent à un écoulement de Poiseuille. Elle aborde le nombre de Reynolds, le calcul du champ de vitesse d'un écoulement, le débit et plus généralement la mécanique des fluides.
- La partie III s'intéresse à l'application du système précédent à une onde acoustique. Elle s'appuie sur les notions d'acoustique, de physique des ondes, de modes propres de vibration et d'électronique.

La difficulté de ce sujet est croissante. La troisième partie mêle différents domaines de la physique et nécessite de la réflexion. Ce sujet est idéal pour réviser l'optique géométrique, la physique des ondes, la mécanique des fluides et l'acoustique. Le sujet offre une large part à des applications numériques qui ne sont pas triviales et devaient être réalisées sans calculatrice.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 Exprimer la distance parcourue par le front d'onde pendant  $\Delta t = 1/f_p$  en fonction de  $c_0$  et  $f_p$ .
- 3 Faire un développement limité au premier ordre en  $\|\vec{V}\|/c_0$ .
- 4 Le faisceau lumineux doit ressortir du système avec des rayons parallèles.
- 5 Faire des schémas avec différentes tailles de diviseur de faisceau et choisir la taille permettant aux rayons de ressortir parallèles entre eux.
- 6 Travailler géométriquement sur les triangles remarquables apparaissant dans le schéma du diviseur de faisceau.
- 10 Le temps de réponse du photorécepteur doit être inférieur à la durée caractéristique du signal détecté.

### Partie II

- 15 Utiliser la conservation de la masse ainsi que la conservation de la quantité de mouvement.
- 16 Ne pas oublier que  $A$  est la vitesse de l'écoulement au centre de la conduite.

### Partie III

- 18 Déterminer une expression du coefficient de compressibilité isentropique en utilisant la loi de Laplace.
- 19 Écrire la solution générale pour la surpression vérifiant une équation de d'Alembert puis utiliser l'équation issue de la conservation de la quantité de mouvement.
- 21 La question est similaire au calcul des modes propres d'une corde de Melde : les deux conditions aux limites imposent une quantification de la fréquence et l'apparition de modes propres.
- 22 Injecter la solution particulière dans l'équation d'onde initiale pour obtenir la relation de dispersion.
- 25 Les paquets d'ondes de deux modes distincts sont discernables si leur décalage temporel à la sortie du tuyau est supérieur à la durée des paquets d'ondes.
- 27 Représenter les signaux  $e_1$  et  $e_2$  puis en déduire l'allure de la sortie  $s$ .
- 28 L'alimentation de l'ALI agit sur les potentiels de saturation en sortie.
- 32 Constaté que la particule agit comme un filtre du premier ordre sur la mesure de la vitesse de l'écoulement.

## I. PRINCIPE DE LA VÉLOCIMÉTRIE LASER

**1** Durant le temps  $\Delta t = 1/f_p$ , le vecteur déplacement de la particule est

$$\vec{d}_p = \Delta t \vec{V} = \frac{1}{f_p} \vec{V}$$

D'après le schéma, le front d'onde parcourt dans le même temps la distance

$$d = (\Delta t \vec{V}) \cdot \vec{u}_e + \lambda_e = \frac{1}{f_p} \vec{V} \cdot \vec{u}_e + \lambda_e$$

La distance parcourue par l'onde peut également s'écrire  $d = c_0/f_p$ . En injectant ce résultat dans l'équation précédente,

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{f_p} &= \frac{1}{f_p} \vec{V} \cdot \vec{u}_e + \lambda_e \\ &= \frac{1}{f_p} \vec{V} \cdot \vec{u}_e + \frac{c_0}{f_e} \end{aligned} \quad \text{puisque } \lambda_e = \frac{c_0}{f_e}$$

Ainsi,

$$f_e = f_e \frac{\vec{V} \cdot \vec{u}_e}{c_0} + f_p$$

Finalement,

$$f_p = f_e \left( 1 - \frac{\vec{u}_e \cdot \vec{V}}{c_0} \right)$$

Le milieu étant supposé transparent aux ondes électromagnétiques, son indice optique est unitaire :  $n = 1$ . Ainsi, la célérité de la lumière dans le milieu est identique à la célérité de la lumière dans le vide  $c = c_0$ .

**2** Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, le laser et le récepteur sont fixes alors que la particule est en translation rectiligne et uniforme à la vitesse  $\vec{V}$ . En vertu du principe de composition des vitesses, la particule est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui lui est attaché alors que le laser et le récepteur y sont en translation rectiligne et uniforme à la vitesse  $-\vec{V}$ . En généralisant la formule obtenue à la question 1,

$$f_d = f_p \left( 1 + \frac{\vec{u}_d \cdot \vec{V}}{c_0} \right)$$

**3** Les formules précédentes permettent de relier la fréquence émise par le laser et la fréquence reçue par le récepteur

$$\begin{aligned} f_d &= f_e \left( 1 - \frac{\vec{u}_e \cdot \vec{V}}{c_0} \right) \left( 1 + \frac{\vec{u}_d \cdot \vec{V}}{c_0} \right) \\ &= f_e \left( 1 + \frac{(\vec{u}_d - \vec{u}_e) \cdot \vec{V}}{c_0} - \frac{(\vec{u}_e \cdot \vec{V})(\vec{u}_d \cdot \vec{V})}{c_0^2} \right) \end{aligned}$$

Le développement limité au premier ordre en  $V/c_0$ , rendu licite par l'hypothèse  $V \ll c_0$  donne, avec  $\lambda_e = c_0/f_e$ ,

$$f_d \simeq f_e + \frac{(\vec{u}_d - \vec{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e}$$

On en déduit l'écart relatif entre la fréquence émise par le laser à argon et celle reçue par le récepteur

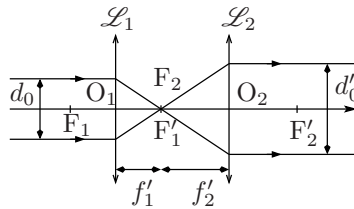
$$\frac{f_d - f_e}{f_e} \simeq \frac{(\vec{u}_d - \vec{u}_e) \cdot \vec{V}}{c_0}$$

Estimons numériquement cette quantité :

$$\frac{f_d - f_e}{f_e} \simeq \frac{V}{c_0} \simeq \frac{10 \times 10^{-2}}{3 \times 10^8} \simeq 3 \times 10^{-10} \ll 1$$

**L'écart relatif entre la fréquence émise par le laser à argon et celle reçue par le récepteur est extrêmement faible devant l'unité.**

**4** Afin d'obtenir un faisceau de rayons parallèles en sortie du système optique, il est nécessaire que le foyer image de la lentille  $\mathcal{L}_1$  soit confondu avec le foyer objet de la lentille  $\mathcal{L}_2$ , comme représenté ci-dessous.



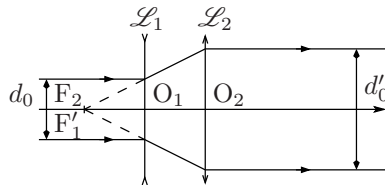
Par le théorème de Thalès,

$$\frac{d'_0}{d_0} = \frac{f'_2}{f'_1}$$

Pour assurer un diamètre en sortie supérieur au diamètre du faisceau entrant,  $d'_0 > d_0$ , il convient de vérifier la relation  $f'_2 > f'_1$  entre les distances focales des deux lentilles. On en déduit l'encombrement  $\mathcal{E}$  du système optique

$$\mathcal{E} = f'_1 + f'_2 = f'_2 \left( 1 + \frac{d_0}{d'_0} \right)$$

Dans le but de réduire l'encombrement, **on peut utiliser un dispositif composé d'une lentille convergente et d'une lentille divergente** illustré ci-dessous. Les distances focales sont telles que  $f'_1 < 0$  et  $f'_2 > 0$ .



On vérifie  $d'_0/d_0 = -f'_2/f'_1$  et l'encombrement devient

$$\mathcal{E}' = f'_1 + f'_2 = f'_2 \left( 1 - \frac{d_0}{d'_0} \right)$$

**L'encombrement est donc réduit.**

## Mines Chimie PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

---

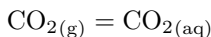
Ce sujet a pour thème l'élément strontium. Il est divisé en cinq parties dont les trois premières sont très courtes.

- La première partie traite de la structure électronique du strontium, que l'on détermine grâce à sa position dans la classification périodique.
- La deuxième partie aborde la structure cristalline du fluorure de strontium. Les notions classiques de population, neutralité, coordinence et contact mixte entre anions et cations sont utilisées.
- La troisième partie concerne la cinétique, d'ordre 1, de la radioactivité  $\beta^-$  du strontium. Signalons une erreur de rédaction à la question 8, qui la rend malheureusement incompréhensible, ce qui a pu gêner les candidats.
- La quatrième partie étudie la thermodynamique de la dissolution du carbonate de strontium, dans l'eau pure dans un premier temps, puis dans une eau en équilibre avec du dioxyde de carbone gazeux dans un second temps.
- Enfin, la cinquième et dernière partie s'intéresse à la réalisation d'une pile à combustible. On utilise les demi-équations électroniques, les potentiels d'oxydo-réduction ainsi que les courbes courant-potentiel, en tenant compte des surtensions.

Presque toutes les questions de ce sujet sont des applications immédiates du cours. Notons cependant que les applications numériques étaient cette année assez pénibles à réaliser sans calculatrice. La difficulté de cette épreuve réside dans son format particulier, si court qu'il est nécessaire de s'y préparer spécifiquement pour être efficace sur les questions simples le jour J. Ce sujet est un très bon entraînement, les thèmes abordés étant récurrents d'une année sur l'autre.

## INDICATIONS

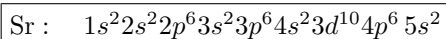
- 1 Compter les électrons de l'élément situé au-dessus du strontium pour déterminer son numéro atomique.
- 3 L'ion carbonate est  $\text{CO}_3^{2-}$ . Représenter tous les doublets d'électrons et les charges formelles.
- 4 Compter les anions et les cations. Le cristal doit être neutre.
- 5 La coordinence est le nombre de premiers voisins. Elle est ici différente pour les anions et les cations.
- 6 À quel endroit anions et cations sont-ils en contact dans la maille ?
- 7 La désintégration  $\beta^-$  produit un électron  ${}_{-1}^0\text{e}^-$ . Écrire l'équation de réaction en précisant les nombres de protons et de nucléons de chaque isotope.
- 8 La formulation de l'énoncé n'a pas de sens. Il faut lire « activité » et non pas « temps d'activité ». Quelle durée particulière s'est écoulée depuis l'accident ?
- 9 Intégrer la loi cinétique d'ordre 1 et trouver l'expression de l'activité en fonction du temps. On peut aussi remarquer que l'activité est divisée par 2 tous les 30 ans, et que  $2^{10} \approx 10^3$ .
- 13 Utiliser le signe de  $\Delta_r H^\circ$  pour déterminer si  $K^\circ(T)$  est une fonction croissante ou décroissante à l'aide de la relation de Van 't Hoff.
- 14 L'équilibre à considérer est la dissolution du gaz en solution :



- 15 Exprimer la nouvelle équation de réaction en fonction de la précédente et des réactions des acides pour faire apparaître  $K_{a1}$  et  $K_{a2}$ . Attention à la stœchiométrie de la réaction, qui forme deux ions  $\text{HCO}_3^-$  lorsque l'on écrit la relation à l'équilibre avec  $s'$ .
- 17 Il ne faut pas oublier le générateur pour réaliser un montage à trois électrodes.
- 18 Équilibrer en milieu basique avec des ions  $\text{OH}^-$ , puisque  $\text{pH} = 14$ .
- 19 Se servir du sens indiqué de circulation des électrons pour trouver l'anode et la cathode, puis utiliser les réactions déterminées à la question précédente pour attribuer les quatre espèces.
- 21 Il faut prendre en compte les surtensions et déterminer leurs signes. On réalise une pile, et non pas une électrolyse : les surtensions rapprochent les branches.
- 22 Il faut utiliser la charge totale et la quantité de matière d'électrons, que l'on relie à la quantité de dioxygène consommée grâce à la stœchiométrie de la réaction. Ne pas oublier le rendement de la pile.

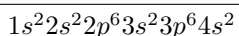
## AUTOUR DU STRONTIUM

**1** Comme le strontium se situe sur la 5<sup>e</sup> ligne et la 2<sup>e</sup> colonne de la classification périodique, sa configuration électronique de valence est  $5s^2$ . D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, sa configuration électronique complète est



En comptant les électrons, on trouve  $Z = 38$ , résultat confirmé par l'énoncé à la question 7 qui donne  $A = 90$  et  $N = 52$ , soit  $90 - 52 = 38$  protons.

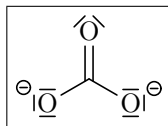
L'élément situé au-dessus du strontium a une configuration électronique de valence  $4s^2$ , ce qui donne la configuration électronique



En comptant les électrons de cette configuration électronique, on trouve le numéro atomique  $Z = 20$  : il s'agit donc du calcium d'après les données de l'énoncé. Calcium et strontium ont ainsi **la même configuration électronique de valence**, et donc des propriétés chimiques similaires, ce qui explique que le strontium peut se substituer au calcium dans les os.

**2** Le strontium ayant deux électrons de valence, il peut les perdre pour acquérir la structure électronique du **gaz noble** qui le précède dans la classification périodique, qui est une structure particulièrement stable. On trouve donc souvent les ions  $\text{Sr}^{2+}$ .

**3** Un schéma de Lewis de l'ion carbonate  $\text{CO}_3^{2-}$  est



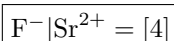
Les électrons sont en réalité délocalisés de sorte que les atomes d'oxygène sont tous équivalents dans l'ion carbonate.

**4** Dans une structure cubique faces centrées (voir la représentation de la question suivante), la population d'une maille est

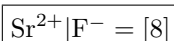
$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

Par ailleurs, il y a huit sites tétraédriques (aux centres des huit petits cubes d'arête  $a/2$ ). Pour que le cristal de fluorure de strontium soit **électriquement neutre**, il est nécessaire d'avoir deux fois plus d'ions fluorure  $\text{F}^-$  que d'ions strontium  $\text{Sr}^{2+}$ , si bien que tous les sites tétraédriques doivent être occupés.

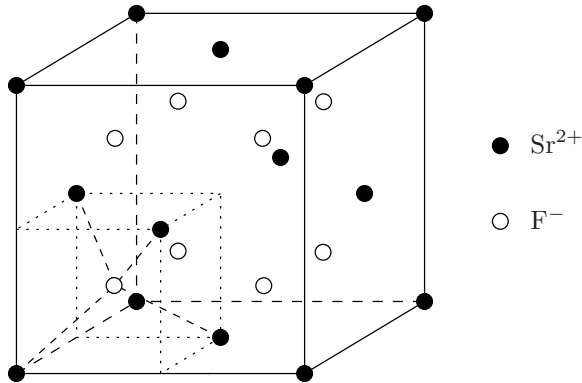
**5** Les ions fluorure étant situés dans des sites tétraédriques, ils sont entourés de quatre ions strontium, leur coordinence est



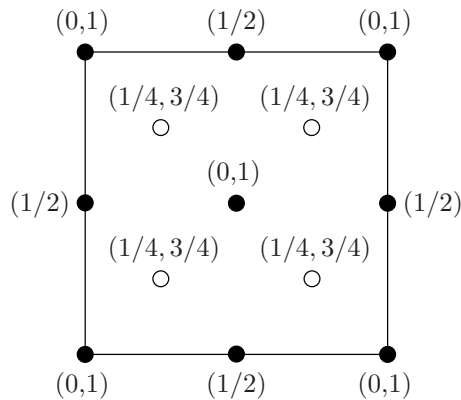
Si on considère un ion strontium au centre d'une face de la maille (voir le schéma de la page suivante), on constate qu'il est entouré de huit ions fluorure (quatre dans cette maille et quatre dans une maille voisine) si bien que la coordinence des cations est



La structure de la maille est



La projection cotée évoquée dans l'énoncé serait



C'est une autre manière de représenter la maille. Il est conseillé de préférer la représentation en perspective, plus aisée à lire.

**6** Le contact entre anions et cations se fait sur le quart de la diagonale de la maille :

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = R + r$$

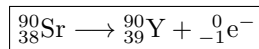
soit

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{4} - R$$

AN:

$$r = \frac{576 \times 7}{16} - 132 = 36 \times 7 - 132 = 120 \text{ pm}$$

**7** La réaction de désintégration  $\beta^-$  produit un électron (noté  ${}^0_{-1}e^-$ ) :



On peut aussi ajouter dans l'équation la production d'un anti-neutrino  ${}^0_0\bar{\nu}$  pour plus de précision.

**8** La formulation de l'énoncé n'est pas adaptée. Le terme « temps d'activité » n'a pas de sens physique. Il faut corriger en « activité », qui est le nombre de désintégrations par seconde à une date donnée.



## X/ENS Physique PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

---

Ce sujet composé de trois parties indépendantes porte sur la modulation acousto-optique.

- Dans la première partie, on caractérise l'onde acoustique produite par un émetteur à ultrasons. Après avoir étudié la courbe de réponse de l'émetteur, on décrit la propagation de l'onde acoustique dans l'air puis dans un solide cristallin.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse au fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique, élément essentiel pour générer une onde acoustique. On détermine les propriétés électriques du matériau et sa réponse à une tension sinusoïdale. La partie s'achève sur l'étude du modèle électrocinétique du transducteur et son lien avec le modèle électrique.
- Le principe d'un modulateur acousto-optique, reposant sur l'interaction entre un faisceau optique et une onde acoustique, est abordé dans la dernière partie. À partir d'une approche corpusculaire, on montre que l'interaction entre ces deux ondes engendre une déviation de l'onde électromagnétique et une modification de sa fréquence. Cette dernière est ensuite mesurée grâce à un montage optique constitué de trois lentilles et d'un récepteur optique. Pour finir, on détermine le spectre de l'onde déviée grâce à un montage de détection synchrone. Cette partie fait appel à des notions d'électrocinétique et d'optique de première année.

L'épreuve est de longueur typique pour un sujet du concours X/ENS. Les questions font appel à des connaissances de sup et de spé, alternant les calculs et les interprétations. La calculatrice n'est plus autorisée pour cette épreuve. Il faut donc s'entraîner à faire les applications numériques à la main.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 Le facteur de qualité  $Q$  est défini par  $Q = f_p/\Delta f$ .
- 6 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $x_n(t)$ . Au repos, tous les ressorts ont une longueur  $a$ .
- 7 Faire un développement limité à l'ordre 2 de  $u_{n+1}$  et  $u_{n-1}$ .
- 8 Utiliser la relation trigonométrique  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ .

### Partie II

- 15 Écrire  $\rho = \rho_{\text{liée}} + \rho_{\text{libre}}$  avec  $\rho_{\text{liée}} = -\operatorname{div} \vec{P}$  dans l'équation de Maxwell-Gauss.
- 16.a Utiliser l'équation locale de Maxwell-Gauss ou le théorème de Gauss.
- 16.b Suivre le même raisonnement que le calcul du champ électrique d'une distribution plane infinie.
- 18 Déterminer l'expression de  $E$  en fonction de  $D$  et  $\xi$  puis l'injecter dans le calcul de la tension électrique.
- 21 Poser  $x = \omega/\omega_0$  puis étudier les extrema du dénominateur de  $|\underline{H}_{\text{elm}}|$ .
- 27 Reprendre l'équation différentielle (13) puis remplacer  $\xi$  par  $(U-Q/C)/\gamma$ . Déterminer l'équation différentielle vérifiée à la fois par  $U$  et  $Q$ . La réécrire finalement en notation complexe avec  $\underline{Q} = \underline{I}/(i\omega)$ .
- 28 Écrire l'expression de  $1/Z_{AB}$  puis la comparer à

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = iC_0\omega + \frac{1}{R_m + iL_m\omega + \frac{1}{iC_m\omega}}$$

### Partie III

- 31 Utiliser la conservation de l'énergie.
- 32 Montrer que  $\lambda \simeq \lambda'$ , où  $\lambda'$  est la longueur d'onde de l'onde lumineuse émergente.
- 33 Projeter la relation de conservation de la quantité de mouvement sur les axes horizontal et vertical.
- 38 Déterminer dans un premier temps l'inégalité sur les angles  $\theta$  puis reprendre les résultats de la question 35.
- 41 Comparer le temps de réponse de la photodiode à la période d'oscillation du signal à la pulsation  $\omega$ .
- 43 On peut visualiser les fréquences du signal de sortie si elles se situent dans la bande passante de l'appareil de mesure.

## I. GÉNÉRATION D'ONDES ACOUSTIQUES

**1** On remarque que la tension  $U_{s,m}$  tend vers 0 à « hautes fréquences » et « basses fréquences », et présente un pic de résonance à une certaine fréquence  $f_p$  : il s'agit d'un **passes-bande**.

La fréquence propre  $f_p$  correspond à la fréquence de la résonance, c'est-à-dire celle où l'amplitude  $U_{s,m}$  est maximale. Graphiquement, on lit environ

$$f_p = 39,8 \text{ kHz}$$

La bande passante à  $-3$  dB est définie par  $\Delta f = f_2 - f_1$  avec  $f_1$  et  $f_2$  vérifiant

$$U_{s,m}(f = f_{2,1}) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

avec  $U_{\max} = 0,35 U_0$  (d'après la figure 2). On cherche alors les abscisses des points d'ordonnée  $0,35/\sqrt{2} = 0,35/1,4 = 0,25$  d'après l'aide numérique. On lit graphiquement  $f_1 = 40,5$  kHz et  $f_2 = 39,0$  kHz. Finalement,

$$\Delta f = 1,5 \text{ kHz}$$

Par définition,

$$Q = \frac{f_p}{\Delta f} \simeq \frac{39,8}{1,5} = \frac{2 \times 39,8}{3} = 2 \times 13,3 = 27$$

**2** Les sons audibles pour une oreille humaine ont des **fréquences situées entre 20 Hz et 20 kHz**. D'après la figure 2, la quasi totalité de la puissance de l'émetteur se situe entre 37 kHz et 44 kHz, c'est-à-dire dans le domaine des ultrasons. Il s'agit bien d'un **émetteur à ultrasons**.

**3** On peut linéariser les termes en négligeant les infiniment petits d'ordre 1 devant les termes d'ordre 0. Ainsi, on a tout d'abord

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{div}(\rho \vec{v}) = \rho_0 \text{div} \vec{v}$$

La vitesse est un terme d'ordre 1 donc le terme convectif  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est un infiniment petit d'ordre 2. Ce terme peut être négligé devant le premier terme de l'équation (4) de l'énoncé. Enfin,  $P_0$  est indépendante de la position donc  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{\text{grad}} p$ . L'équation (4) linéarisée s'écrit alors

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

De même, la masse volumique  $\rho_0$  est une constante :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}$ . L'équation (5) de l'énoncé devient

$$\rho_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

La linéarisation de la masse volumique vue en tant que fonction de la pression s'écrit au premier ordre en  $P$ , autour de  $P_0$ ,

$$\rho(P) = \rho(P_0) + (P - P_0) \frac{\partial \rho}{\partial P}$$

Or,  $\rho(P_0) = \rho_0$  donc  $\rho(P) - \rho_0 = \mu$ . Puisque  $P - P_0 = p$ , on a finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\mu}{p} = \chi_S \rho \simeq \chi_S \rho_0$$

Finalement, l'équation (6) linéarisée est

$$\boxed{\mu = \chi_S \rho_0 p}$$

4 Avec  $\mu = \chi_S \rho_0 p$ , l'équation de conservation de la masse linéarisée donne

$$\rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \chi_S \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Dérivons cette relation par rapport au temps. D'après le théorème d'interversion des dérivées partielles de Schwarz,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{v}) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$$

On arrive alors à

$$\rho_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Avec l'équation d'Euler linéarisée et  $\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} p) = \Delta p$ , on obtient

$$\Delta p = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Delta p - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}$$

5 D'après la figure 3, la seconde onde arrive avec un retard correspondant à 2,5 divisions sur l'oscilloscope, c'est-à-dire au bout d'un temps  $\Delta t = 0,5$  ms. On en déduit la célérité du son expérimentale  $c_{s,\text{exp}}$  :

$$\boxed{c_{s,\text{exp}} = \frac{d_{\text{rec}}}{\Delta t} = \frac{17 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-4}} = \frac{17}{5} \times 10^2 = 3,4 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}}$$

Avec les données numériques de l'énoncé, la valeur théorique  $c_{s,\text{th}}$  vaut

$$\boxed{c_{s,\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{1,2 \times 7 \times 10^{-6}}} = 8,4^{-0,5} \times 10^3 = 3,45 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}}$$

Les deux valeurs coïncident aux arrondis numériques près : **le modèle proposé est légitime.**

6 À l'équilibre, tous les ressorts ont la même longueur  $a$ , qui correspond à leur longueur à vide. L'atome  $n$  est soumis à deux forces :

- la force de rappel du ressort de gauche de longueur instantanée  $x_n(t) - x_{n-1}(t)$  :

$$\vec{T}_g = -K (x_n - x_{n-1} - a) \vec{e}_x$$

- la force de rappel du ressort de droite de longueur instantanée  $x_{n+1}(t) - x_n(t)$  :

$$\vec{T}_d = K (x_{n+1} - x_n - a) \vec{e}_x$$

## X/ENS Modélisation PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Didier (professeur en CPGE) et Jacques Ding (École Polytechnique) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

---

Ce sujet de modélisation propose d'étudier le fonctionnement d'un générateur houlomoteur et d'optimiser la récupération de l'énergie des vagues. Le problème est structuré en plusieurs parties, toutes indépendantes, dont une courte première partie introductive sans question.

- Dans la deuxième partie, on étudie la houle pour estimer la puissance théorique récupérable par le générateur. On établit le champ des vitesses de l'eau en présence d'une vague puis on mène un raisonnement énergétique afin de calculer la puissance houlomotrice récupérable. Cette partie orientée physique mobilise beaucoup de connaissances en mécanique des fluides.
- Dans la troisième partie, on met en place la modélisation de la dynamique du système et on s'intéresse à sa résolution. Cette modélisation se décompose en différentes étapes. On paramètre tout d'abord le système dans l'hypothèse des petits déplacements. Puis on étudie la modélisation de l'action du fluide sur la structure, la mise en équation de la dynamique du problème ainsi que sa résolution proprement dite, dans le domaine fréquentiel et sous forme matricielle. Enfin, on analyse des résultats afin de conclure sur les performances de la récupération d'énergie. On ne rencontre ici que des problématiques de sciences de l'ingénieur, essentiellement calculatoires.
- La quatrième partie permet de calculer la commande optimale à fournir au moteur pour optimiser la récupération d'énergie. Pour ce faire, on utilise le formalisme de la transformée de Fourier. Cette partie est essentiellement calculatoire et ne requiert pas de connaissance particulière ; il faut cependant être à l'aise avec les notations complexes.
- Enfin, dans la dernière partie, on s'intéresse à la mesure du courant de la machine synchrone pour mieux l'asservir. Le circuit de mesure repose essentiellement sur un transformateur, dont on établit la fonction de transfert. Cette partie mélange les raisonnements vus en conversion de puissance et le formalisme des schémas-blocs.

Cette longue épreuve (presque 60 questions) aborde des thèmes variés et classiques de physique. Mis à part la quatrième partie, entièrement calculatoire, le reste du sujet s'inscrit strictement dans le cadre du programme de PSI. L'étude de la houle est un thème très récurrent dans les sujets de concours ; il en est de même pour la mise en équation du transformateur. En ce sens, cette épreuve constitue un très bon entraînement pour gagner en confiance sur les chapitres vus pendant la deuxième année.

## INDICATIONS

### Partie II

- 4 Un écoulement est irrotationnel lorsque le champ des vitesses a un rotationnel nul en tout point.
- 9 Comme les vagues sont de faible amplitude, on peut évaluer les relations (3) et (4) de l'énoncé en  $z = 0$  afin d'établir les expressions de A et B.
- 12 Commencer par relier  $\dot{x}(t)$  et  $u(x_0, z_0, t)$  (de même pour  $z$ ).
- 14 Pour simplifier le calcul, on peut éliminer de la double intégrale les termes périodiques de moyenne nulle.

### Partie III

- 18 Écrire la fermeture géométrique pour faire apparaître les paramètres voulus.
- 22 Interpréter  $h_M$  comme un produit scalaire en s'appuyant sur la figure 10, ainsi que  $\overrightarrow{\varepsilon(O)}$  comme le vecteur  $\overrightarrow{OG_E}$ .
- 28 Utiliser les résultats des questions 23, 26 et 27.
- 31 Réfléchir à une décomposition astucieuse du flotteur en deux cylindres, dont la contribution de l'un se retrancherait à celle de l'autre.
- 34 Il ne faut pas faire intervenir les inconnues de liaison entre le flotteur et l'embase.

### Partie IV

- 40 Montrer que  $\check{X}(-\omega) = \check{X}^*(\omega)$  pour toute fonction réelle  $X(t)$ .
- 41 Utiliser une relation de Chasles pour scinder l'intégrale initiale en deux, puis effectuer le changement de variable  $\omega' = -\omega$  dans l'une des intégrales.
- 44 Remarquer que  $\alpha$  est le carré du module d'un nombre complexe.

### Partie V

- 48 Appliquer le théorème d'Ampère sur un contour traversant le tore et le capteur à effet Hall.
- 55 Étudier séparément la fonction de transfert associée à chaque « bloc ALI ».
- 56 Montrer que le gain statique ne dépend plus de  $K_3$ .

## II. ÉTUDE DE LA HOULE

**1** Les génératrices houlomotrices doivent être placées près des côtes pour faciliter le transport de l'énergie récupérée vers l'intérieur des terres. On constate sur la figure 5 que les régions où la puissance de la houle est la plus grande sont comprises à des latitudes entre  $40^\circ$  et  $60^\circ$  Nord ou Sud, proches des côtes, par exemple les côtes Ouest de l'Amérique et de l'Europe (face Atlantique de la France). Cela justifie l'intérêt de la France pour la mise en place de tels générateurs.

**2** Les vagues sont modélisées par une onde mécanique progressive harmonique se propageant selon les  $x$  croissants. On écrit donc  $\eta(x,t)$  sous la forme générale

$$\eta(x,t) = a \cos(kx - \omega t + \varphi) = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t + \varphi\right)$$

où  $\varphi$  est un angle constant déterminé par la condition de l'énoncé

$$\eta\left(\frac{\lambda}{4}, 0\right) = a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0$$

On constate qu'une solution possible est  $\varphi = 0$  et on obtient

$$\boxed{\eta(x,t) = a \cos(kx - \omega t)}$$

Une autre solution possible est  $\varphi = \pi$  qui donne

$$\eta(x,t) = -a \cos(kx - \omega t)$$

**3** L'équation de conservation de la masse est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}_f) = 0$$

Le fluide étant incompressible et homogène, cette équation se simplifie en

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}_f) = 0}$$

**4** L'écoulement est irrotationnel donc

$$\operatorname{rot} \vec{v}_f = \vec{0}$$

La notion d'écoulement irrotationnel n'est pas au programme de la filière PSI. On qualifie ainsi un écoulement dont le rotationnel du champ des vitesses est nul en tout point.

On peut donc raisonner par analogie avec l'électrostatique, où l'équation de Maxwell-Faraday statique s'écrit

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Cette relation implique que le champ électrique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel électrique  $V$ . Ainsi, il existe aussi un potentiel des vitesses  $\phi(x,z,t)$  tel que pour tout  $x, z$  et  $t$ ,

$$\vec{v}_f(x,z,t) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi(x,z,t)$$

Écrivons alors l'équation de conservation de la masse en y introduisant le potentiel :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi) = 0$$

Autrement dit,

$$\boxed{\Delta \phi = 0}$$

**5** Raisonnons sur le schéma suivant, où on a représenté des petits déplacements  $\Delta\eta$  et  $\Delta x$  en un point de la surface. On définit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent à  $\eta(x,t)$ . Dans le triangle rectangle ainsi dessiné,

$$\tan \alpha = \frac{\Delta\eta}{\Delta x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Or, d'après l'énoncé, la cambrure est faible devant l'unité, donc  $a \ll \lambda$ . En raisonnant en ordres de grandeur,

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta x} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$$

Autrement dit,  $\tan \alpha$  est faible donc on peut l'approcher au premier ordre par  $\alpha$  et

$$\alpha \approx \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Par ailleurs, on voit sur le schéma que le vecteur normal  $\vec{n}$  s'écrit

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_x$$

Toujours au premier ordre en  $\alpha$ , on a  $\sin \alpha \approx \alpha$  et  $\cos \alpha \approx 1$ , donc

$$\vec{n} \simeq \vec{e}_z - \alpha \vec{e}_x$$

**6** En utilisant la relation de continuité de l'énoncé et l'expression de  $\vec{n}$  de la question précédente, on obtient

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \vec{v}_f \cdot \vec{n} = w - \alpha u$$

Pour obtenir la relation souhaitée, montrons que  $\alpha u$  est négligeable par rapport à  $w$ . En utilisant la question précédente, on calcule en ordre de grandeur

$$\frac{w}{\alpha u} \sim \frac{w}{u} \times \frac{\Delta x}{\Delta\eta} \sim \frac{w}{\lambda} \times \frac{\Delta x}{u} \times \frac{\lambda}{\Delta\eta}$$

Or, l'équation de conservation de la masse trouvée à la question 3 donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \frac{u}{\Delta x} \sim \frac{w}{\Delta z}$$

On a  $\Delta x \sim \lambda$  et comme les vagues sont de faible amplitude, la profondeur  $\Delta z$  est telle que  $\Delta z \gg \Delta\eta$ . Ainsi,

$$\frac{w\Delta x}{u} \sim \Delta z \gg \Delta\eta$$

donc

$$\frac{w}{\alpha u} \sim \frac{\Delta z}{\Delta\eta} \gg 1$$

Il ne reste que  $w$  dans l'équation de continuité, qui s'écrit avec le potentiel

$$w(x,\eta,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,\eta,t)$$

d'où

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} \approx \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,\eta,t)$$

