Annales des Concours

# PSI
# Mathématiques · Informatique
# 2021


Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

William Aufort
professeur en CPGE

Pierre Bosch
professeur en CPGE

Philippe Bouafia
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Céline Chevalier
enseignant-chercheur à l'université

Julien Dumont
professeur en CPGE

Julie Gauthier
professeur agrégé

Quentin Guilmant
ENS Lyon

David Michel
professeur agrégé

Rémi Pellerin
ENS Lyon

Cyril Ravat
professeur en CPGE

# Sommaire thématique de mathématiques

## 2015 – 2021

| | Structures algébriques et arithmétique | Polynômes | Algèbre linéaire générale | Réduction des endomorphismes | Produit scalaire et espaces euclidiens | Topologie des espaces vectoriels normés | Suites et séries numériques | Suites et séries de fonctions | Séries entières | Analyse réelle | Intégration | Équations différentielles | Fonctions de plusieurs variables | Dénombrement et probabilités | Informatique pour tous |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| e3a MP Maths 1 (2021) | | • | • | • | • | | • | • | | • | • | | | • | |
| e3a PC Maths 1 (2021) | | | • | | • | | | • | | | • | | | | |
| e3a PSI Maths 1 (2021) | | • | • | • | | | | | • | | • | • | | • | |
| CCINP MP Maths 1 | • | • | • | | • | • | ••• | ••••••• | •••• | ••• | •••••• | | • | ••••• | •• |
| CCINP MP Maths 2 | ••• | •••• | ••••• | ••••••• | ••••• | •• | | | | | • | • | | • | ••• |
| CCINP PC Maths | | ••• | ••• | ••• | •• | •• | | •• | ••• | | ••••• | • | • | •••••• | |
| CCINP PSI Maths | | | ••••• | ••••• | • | • | ••• | • | •••• | ••• | •••• | •••• | • | •• | |
| Centrale MP Maths 1 | • | •• | •••• | ••••• | • | •• | •• | • | • | •• | •• | • | | •• | |
| Centrale MP Maths 2 | | • | •• | • | • | •• | ••• | ••• | ••• | •• | •••••• | •• | •• | ••• | |
| Centrale PC Maths 1 | • | •• | •••• | •••• | ••• | | | | •••• | | •• | • | • | •••• | |
| Centrale PC Maths 2 | • | •• | • | | • | | •• | •••• | ••• | ••• | •••• | | | •••• | |
| Centrale PSI Maths 1 | | •• | •••• | •••• | | •• | ••• | •• | • | •• | | • | • | •••••• | •• |
| Centrale PSI Maths 2 | | •• | ••• | • | | | •• | •• | ••• | ••• | •••• | •• | • | ••••• | |
| Mines MP Maths 1 | • | | ••• | ••• | •• | • | ••• | • | •• | •• | •• | •• | | ••••• | |
| Mines MP Maths 2 | | ••• | ••• | •• | ••• | ••• | ••• | ••• | • | •• | ••• | • | • | •• | |
| Mines PC Maths 1 | | • | ••• | • | | | ••• | •• | •• | ••• | • | • | | •••••• | |
| Mines PC Maths 2 | | •• | •• | | • | | •• | • | •• | ••• | •••• | •• | • | • | |
| Mines PSI Maths 1 | | | ••• | • | | | •• | •• | •• | ••• | • | • | | •••••• | |
| Mines PSI Maths 2 | | •• | •••• | ••• | •• | •• | • | • | | ••• | ••• | • | | • | |
| X/ENS MP Maths A | ••• | ••••• | •••••• | ••••• | •• | •••• | •• | | •• | •• | | | | | |
| X/ENS MP Maths B | • | •• | | | •• | • | ••• | ••• | •• | •••••• | •••••• | • | • | ••• | |
| X/ENS PC Maths | | •• | ••• | ••• | •• | •• | | | | ••• | ••• | | • | ••• | |
| X/ENS PSI Maths | | ••• | •••• | • | •• | •• | • | • | • | •••• | • | • | • | | |

# Sommaire

### Mines-Ponts



### Polytechnique-ENS



### Formulaires

**SESSION 2021** **PSI8M**

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

## MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*RAPPEL DES CONSIGNES*

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

---

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

# Exercice 1

On note $F$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J = ]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![ -1, p ]\!]$, on définit les fonctions $f_k$ sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ \ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![ 0, p ]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

**1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

**1.1.** Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

**1.2.** Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![ -1,p ]\!]}$ est libre.
On note $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$.

**1.3.** En déduire la dimension de $E$.

**2.** On note $u$ l'application qui à toute fonction $f$ de $E$ associe la fonction $g$ définie sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ \ g(x) = (1+x)\,f'(x).$$

**2.1.** Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de $f_k$ par $u$.

**2.2.** Vérifier que $u$ est un endomorphisme de $E$.

**2.3.** Déterminer le noyau et l'image de $u$.

**2.4.** Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de $f_{-1}$.

**2.5.** Déterminer la matrice $M$ de $u$ dans la base $\mathscr{B}$.

**2.6.** L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

**2.7.** L'endomorphisme $u^2$ est-il diagonalisable ?

**3.** Résoudre sur $J$ l'équation différentielle $(ED)$ $\ f_{-1}(t) = (1+t)\,y'(t)$.

**4.** Soit $h_2$ la solution de l'équation différentielle $(ED)$ nulle en zéro.

**4.1.** On note $h_3$ la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\,y'(t)$ nulle en zéro.
Expliciter $h_3$.

**4.2.** En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $h_k$ la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\,y'(t)$.
Expliciter $h_k$.

**5. Étude de la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$**

**5.1.** Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$ converge simplement sur $J$ et calculer sa somme $H$.

**5.2.** La fonction $H$ est-elle dans $E$ ?

**5.3.** En utilisant la question **5.1**, vérifier que $H$ est dérivable et que $H' \in E$.

# Exercice 2

On note $S$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

**1.** On note $\gamma$ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

**2.** On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S$ vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de $y_n$ valable pour tout entier naturel $n$. Laquelle ?

$$(1)\ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}\,;\qquad (2)\ y_n = \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}\,;\qquad (3)\ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}.$$

**3.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :
- $X_0$ et $X_1$ sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ ;
- pour tout entier naturel $n$ : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

**3.1.** Montrer que la variable aléatoire $X_2$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

**3.2.** Démontrer que les deux variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes.

**3.3.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad X_n = y_{n-1}\,X_0 + y_n\,X_1$.

**3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire $X_p$ pour $p \in \mathbb{N}$**

**3.4.1.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire $X_p$ possède une espérance que l'on notera $x_p$ et la calculer en fonction de $\lambda$, $\mu$ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3.4.2.** Déterminer un équivalent de $x_p$ lorsque $p$ tend vers l'infini.

**3.5.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire $X_p$ possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de $\lambda$, $\mu$ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3.6.** Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de $\lambda$, $\mu$ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires $X_p$ et $X_q$.
Que peut-on en conclure ?

# Exercice 3

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$.

**1.** Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $I_n$.

**2.** En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**3.** En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans $I_n$.

# e3a Mathématiques PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet se compose de quatre exercices indépendants qui portent chacun sur des parties différentes du programme.

- Le premier exercice propose l'étude d'un espace vectoriel de fonctions dérivables à valeurs réelles. On montre en particulier qu'un tel espace n'est pas toujours stable pour la dérivation et ne contient pas forcément les limites de ses séries simplement convergentes. Les questions 3 et 4 font appel au cours sur les équations différentielles.
- Dans le deuxième exercice, on commence par montrer des résultats classiques sur la suite de Fibonacci. Une application est ensuite proposée pour étudier une suite de variables aléatoires définie par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_{n+2} = \mathrm{X}_{n+1} + \mathrm{X}_n$$
- Le troisième exercice porte sur l'étude du domaine de convergence de la série entière $\sum \mathrm{I}_n x^n$ où
$$\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$$
On y utilise les principaux résultats du cours d'intégration.
- Enfin, le dernier exercice traite de réduction d'endomorphismes. On y établit, à l'aide notamment des polynômes interpolateurs de Lagrange, le résultat suivant : pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, tout $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et tous complexes distincts deux à deux $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, l'endomorphisme $u$ est diagonalisable de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ si et seulement si
$$\exists p_1, \ldots, p_m \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k = \sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^k p_j$$

Ce sujet est excellent pour les révisions. Il n'est pas très difficile, et permet de revoir les principaux théorèmes du cours d'analyse (intégration, équations différentielles, probabilités, suites récurrentes, séries entières) et du cours d'algèbre linéaire. Les questions sont un peu plus délicates à la fin des exercices mais l'ensemble du sujet pouvait être traité dans le temps imparti. Il avait sans doute été conçu pour sélectionner les candidats à l'aise avec l'ensemble du programme. De ce fait, il convient aussi aux révisions des élèves d'autres filières.

## Indications

### Exercice 1

1.1 Raisonner par l'absurde et faire tendre $x$ vers $+\infty$.

1.2 Utiliser la question précédente puis montrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, etc. On pourra multiplier la somme par $(1+x)^p$.

2.3 Utiliser la question 2.1 en exprimant les images des éléments de $\mathscr{B}$ par $u$ en fonctions de $f_0, \ldots, f_p$.

2.4 Montrer $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \varnothing$ en utilisant la question 2.3.

2.6 En utilisant la question précédente, calculer le polynôme caractéristique de $u$ et raisonner sur la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Utiliser la question 2.3 pour conclure.

2.7 Utiliser la question 2.1 ou bien la question 2.5.

4.2 Montrer par récurrence sur $k$ que

$$\forall k \geqslant 2 \quad \forall x \in \mathrm{J} \qquad h_k(x) = \frac{1}{k\,!}\ln(1+x)^k$$

5.2 Raisonner par l'absurde en remarquant que si $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$, alors $(x \mapsto x) \in \mathrm{E}$. Obtenir une contradiction en justifiant que

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1+x} = 0$$

### Exercice 2

1 Remarquer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) = \mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} - ab$.

2 On pourra remarquer que $\gamma + 1/\gamma = \sqrt{5}$.

3.2 Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0 \,|\, \mathrm{X}_1 = 0) \neq \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0)$.

3.4.1 Une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ a une espérance (et une variance) qui vaut $\lambda$.

3.4.2 Utiliser les questions 1 et 2 pour justifier que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma^n/\sqrt{5}$ puis en déduire que

$$x_p = \frac{\gamma^{p-1}}{\sqrt{5}}\lambda + \frac{\gamma^p}{\sqrt{5}}\,\mu + \underset{p\to+\infty}{\mathrm{o}}(\gamma^p)$$

3.5 Une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ a une variance (et une espérance) qui vaut $\lambda$. De plus, si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(\mathrm{Y})$.

3.6 Rappelons que si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé, $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. De plus, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$.

## Exercice 3

2 Utiliser le théorème de convergence dominée. On pourra établir que

$$\forall t \geqslant 1 \qquad \mathrm{e}^{-t^n} \leqslant \frac{2}{t^2}$$

4 Utiliser de nouveau le théorème de convergence dominée.

6.1 Si les suites des coefficients de deux séries entières sont équivalentes, alors ces séries ont le même rayon de convergence.

6.2 Utiliser le critère des séries alternées pour montrer que $f$ est définie en $-1$.

## Exercice 4

1 Considérer une famille de projecteurs associée à la décomposition de E en somme directe d'espaces propres de $u$.

2.2 Montrer que le polynôme $\pi_u = \prod_{j=1}^{m} (\mathrm{X} - \lambda_i)$ vérifie $\pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

2.3.2 Utiliser la question précédente pour montrer que la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{L}_j)_{j \in [\![ 1\,;\, m ]\!]}$ est libre.

2.3.3 Utiliser la question 2.3.1 pour montrer que

$$\forall \, \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_j)\, \mathrm{L}_j$$

2.4 Fixer $i \in [\![ 1\,;\, m ]\!]$ et utiliser les résultats des questions 2.1 et 2.3.3 avec $\mathrm{P} = \mathrm{L}_i$.

2.5 Remarquer tout d'abord que sp $u \subseteq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Pour obtenir l'égalité, montrer que les $p_i$ donnés par la relation $(*)$ sont des projecteurs en examinant leurs valeurs propres, puis que tout vecteur $y_i \in \mathrm{Im}\,(p_i)$ non nul est propre pour $u$ et $\lambda_i$. Pour cela, on pourra établir que $p_j \circ p_i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ si $i \neq j$.

# Exercice 1

**1.1** Soient $(a_k)_{k\in[\![-1\,;\,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle. Raisonnons par l'absurde et supposons que $a_{-1} \neq 0$. Dès lors,

$$\forall x \in \mathrm{J} \qquad a_{-1}\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} = 0$$

puis
$$\forall x \in \mathrm{J} \qquad \ln(1+x) = \frac{-1}{a_{-1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k}$$

En passant à la limite dans le membre de droite quand $x \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{a_{-1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} = \frac{-a_0}{a_{-1}}$$

ce qui est absurde car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour tous réels } (a_k)_{k\in[\![-1\,;\,p]\!]} \text{ tels que } \sum_{k=-1}^{p} a_k f_k = 0, \text{ on a } a_{-1} = 0.}$$

**1.2** Soient $(a_k)_{k\in[\![-1\,;\,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle. D'après la question précédente, $a_{-1} = 0$. Montrons à présent que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0\,;\,p]\!]$. Remarquons que la fonction

$$g\colon \begin{cases} \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (1+x)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} \end{cases}$$

est nulle. De ce fait,

$$\forall x \in \mathrm{J} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k (1+x)^{p-k} = 0$$

puis, avec le changement d'indice $\ell = k - p$,

$$\forall x \in \mathrm{J} \qquad \sum_{\ell=0}^{p} a_{p-\ell} (1+x)^{\ell} = 0$$

Puisque J contient une infinité d'éléments, le polynôme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k} (1+\mathrm{X})^k$$

admet une infinité de racines, il est donc nul. Comme la famille $((1+\mathrm{X})^n)_{n\in[\![0\,;\,p]\!]}$ est échelonnée en degré, elle est en particulier libre. Par conséquent, $a_{p-k} = 0$ pour tout entier $k \in [\![0\,;\,p]\!]$. Ceci étant valable pour toute famille de réels $(a_k)_{k\in[\![-1\,;\,p]\!]}$, il s'ensuit que

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est libre.}}$$

# CCINP Maths PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet se compose d'un court exercice suivi de deux problèmes, le premier d'analyse (séries entières, équivalents, intégrales) et le second d'algèbre linéaire.

- Dans l'exercice, on recherche les extremums d'une fonction de deux variables. Les méthodes employées sont assez élémentaires et demandent de visualiser la fonction étudiée.
- Le premier problème porte sur les fonctions polylogarithmiques, définies par les séries entières
$$f_\alpha \colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$
La première partie étudie les propriétés élémentaires de ces séries (domaine de convergence, comportement au bord). La deuxième étudie une série dont la définition est proche de $f_1$, qui prolonge la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur une partie du plan complexe. Enfin, la dernière partie continue l'étude au bord du domaine de convergence des fonctions $f_\alpha$, entamée dans la première partie, dans le cas où $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. Les trois parties sont indépendantes.
- Le second problème vise à montrer que, pour toute matrice carrée $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients complexes, le déterminant de $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}\overline{\mathrm{C}}$ est un réel positif. Il comporte deux parties quasi indépendantes. La première s'occupe de montrer le théorème dans des cas particuliers : d'abord lorsque C est diagonale, puis lorsqu'elle est symétrique réelle et plus généralement lorsque C est à coefficients réels. La seconde partie traite le cas où C est à coefficients complexes ; elle contient les questions les plus difficiles du sujet.

Cette épreuve balaie de nombreuses parties du programme de mathématiques. Les questions sont classiques et de difficulté variable. Ce sujet permet de s'entraîner aux écrits sans s'obliger à traiter un énoncé long, puisque ses composantes sont indépendantes.

# Indications

## Exercice

2 Étudier les fonctions $t \mapsto f(t,t)$ et $t \mapsto f(t,-t)$.

5 Montrer que la fonction $f$ n'est ni majorée ni minorée.

## Problème 1

8 Se rappeler que, pour une série alternée, le signe de la somme est celui de son premier terme.

10 Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ converge normalement sur $[-1\,;1]$.

11 Montrer que $f_\alpha \geqslant f_1$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.

12 Se souvenir qu'une fonction génératrice est une série entière dont le domaine de convergence contient le point 1.

13 Calculer d'abord la dérivée de $\mathrm{G}_\alpha$ sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$. Pour étudier la dérivabilité en 1, on pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

17 Montrer que $[0\,;1] \subset\, ]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$.

19 Ne pas tenter une résolution directe de l'équation. Utiliser un argument d'unicité de la solution et en trouver une évidente.

21 Trouver un changement de variable approprié.

23 Encadrer tout d'abord $x^n/n^\alpha$ par des intégrales, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, avant de sommer.

24 Montrer que $\mathrm{I}(x) \sim \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

## Problème 2

25 Calculer explicitement $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}\overline{\mathrm{C}}$.

26 Se ramener au cas de la question 25 par une diagonalisation de C.

28 Factoriser $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}^2$.

32 Appliquer le résultat de la question 31 à la matrice $\lambda\mathrm{I}_{2n} - \mathrm{C}_0 \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et en déduire que $\chi_{\mathrm{C}_0}$ prend des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$.

35 Si $\mathrm{Z} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}, \Omega\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}\right)$, montrer qu'une certaine combinaison linéaire de Z et $\Omega(\mathrm{Z})$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}$.

36 Montrer que $\alpha_{\overline{\lambda}} = \alpha_\lambda$ et remarquer que $(\overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n} - \mathrm{C}_0)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\Omega(\mathrm{Z}) = \Omega((\lambda\mathrm{I}_{2n} - \mathrm{C}_0)^{\alpha_\lambda}\mathrm{Z})$ pour $\mathrm{Z} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

37 Montrer que $\mathrm{F}_\lambda$ est stable par $\Omega$ et utiliser la question 35.

38 Écrire le déterminant de $\mathrm{C}_0$ comme le produit des valeurs propres de $\mathrm{C}_0$ comptées avec multiplicité.

## Exercice - Étude d'extremums

**1** Tout d'abord, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes généraux. Ses points critiques sont les solutions de l'équation $\nabla f(x,y) = (0,0)$, où

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$

On résout le système

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

- Analyse : si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution, alors $x^4 = (x^2)^2 = y^2 = x$, de sorte que $x$ satisfait $x(x^3-1) = 0$, ce qui ne peut se produire que lorsque $x \in \{0,1\}$. Ainsi, on a $x = x^2 = y$. Les solutions possibles de l'équation sont $(0,0)$ et $(1,1)$.
- Synthèse : en réinjectant dans l'équation, on vérifie sans difficulté que $(0,0)$ et $(1,1)$ sont des points critiques de $f$.

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont } (0,0) \text{ et } (1,1).}$$

**2** On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t,t) = -3t^2 + 2t^3 = t^2(-3+2t)$, si bien que $f(t,t) < 0$ pour tout $t \in \left]-\infty\,;3/2\right[ \smallsetminus \{0\}$. De manière analogue, on constate que pour tout $t \neq 0$ on a $f(t,-t) = 3t^2 > 0$. On peut conclure de ce qui précède que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ prend des valeurs strictement positives} \\ \text{et strictement négatives dans tout voisinage de } (0,0).\end{array}}$$

> On aurait pu considérer la fonction partielle $x \mapsto f(x,0) = x^3$ qui prend des valeurs strictement négatives pour $x < 0$ et strictement positives pour $x > 0$.

Or il se trouve que $f(0,0) = 0$. Il vient alors que

$$\boxed{\text{Le point critique } (0,0) \text{ n'est pas un extremum local de la fonction } f.}$$

**3** Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(1+u, 1+v) - f(1,1) \\ &= (1+u)^3 + (1+v)^3 - 3(1+u)(1+v) - (-1) \\ &= (1+3u+3u^2+u^3) + (1+3v+3v^2+v^3) - 3(1+u+v+uv) + 1 \\ g(u,v) &= 3(u^2+v^2-uv) + u^3 + v^3 \end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(u,v) = 3(u^2+v^2-uv) + u^3 + v^3}$$

Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On a cette fois

$$\begin{aligned} g(r\cos\theta, r\sin\theta) &= 3r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta) + r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \\ &= 3r^2(1 - \cos\theta\sin\theta) + r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \qquad g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2(1-\cos\theta\sin\theta) + r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}$$

**4** Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Notons qu'on a les inégalités $\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)/2 \leqslant 1/2$ et $\cos^3\theta + \sin^3\theta \geqslant -2$. Ces inégalités permettent de minorer

$$\begin{aligned} g(r\cos\theta, r\sin\theta) &\geqslant 3r^2\left(1-\frac{1}{2}\right) - 2r^3 \\ &\geqslant \frac{3r^2}{2} - r^2(2r) \\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) &\geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2r}{3}\right) \end{aligned}$$

De plus, $2r/3 \leqslant 2r$, d'où l'on déduit que

$$\boxed{\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \qquad g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant 1/4$. En utilisant des coordonnées polaires, il existe $r \in [\,0\,;1/4\,]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $(x-1, y-1) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Par ce qui précède,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(1,1) &= g(x-1, y-1) \\ &= g(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &\geqslant 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right) \\ f(x,y) - f(1,1) &\geqslant 0 \qquad \text{(car } r \leqslant 1/4\text{)} \end{aligned}$$

Par suite, $\boxed{\text{Le point critique } (1,1) \text{ est un minimum local de } f.}$

**5** D'après le cours, les extremums locaux de $f$ ne peuvent être atteints qu'en des points critiques, ici $(0,0)$ et $(1,1)$. On conclut alors avec les questions 2 et 4 que $f$ n'admet pas de maximum local. A fortiori, elle n'a pas de maximum global. De surcroît, on observe que

$$f(x,0) = x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$$

Ainsi la fonction $f$ n'est pas minorée et ne peut pour cette raison admettre de minimum global. En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'a pas d'extremum global.}}$$

# Problème 1

## I. Quelques propriétés des fonctions $f_\alpha$

**6** On rappelle que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est par définition

$$\mathrm{R} = \sup\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}\}$$

La borne supérieure est prise dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

# CCINP Informatique PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde différents aspects informatiques des montres multisport. Ces objets connectés sont devenus très populaires dans le monde du sport amateur et professionnel, notamment parce qu'ils permettent, à travers l'enregistrement de mesures physiques et physiologiques, de mesurer les performances des sportifs. Les trois parties du sujet sont indépendantes.

- La partie I est consacrée à l'acquisition et au traitement des données issues du module GPS d'une montre multisport. Celles-ci sont organisées sous la forme de trames qui suivent une norme décrite en annexe de l'énoncé. On implémente dans cette partie des fonctions permettant l'extraction et la vérification des trames, puis d'en isoler les données relatives à la localisation du coureur. Ces questions de programmation portent principalement sur les manipulations de chaînes de caractères (extraction et conversion en valeur numérique).
- La partie II se concentre sur l'acquisition du rythme cardiaque par une montre, à partir d'une analyse infrarouge de la saturation en oxygène du sang. Deux méthodes distinctes de traitement du signal sont employées, dont une utilise la transformée de Fourier discrète. La plupart des questions de cette partie demandent de compléter ou documenter un code déjà fourni dans l'énoncé.
- Enfin, la partie III introduit une base de données stockant les activités des utilisateurs de la montre. Plutôt courte (seulement trois questions) et facile, elle sert surtout de prétexte à écrire et interpréter des requêtes SQL.

La longueur du sujet est raisonnable et comparable à celles des années précédentes. Le programme de deuxième année n'est pas abordé et l'ingénierie numérique n'est évaluée que sur une seule question. Il s'agit donc avant tout de comprendre, commenter et écrire du code. Le candidat était également évalué sur sa capacité à absorber les nombreuses informations de l'énoncé et à réutiliser celles qui sont pertinentes. Il s'agit donc d'un bon sujet d'entraînement pour les étudiants de première année. On regrettera cependant l'absence de documentation de certaines fonctions spécifiques et non exigibles.

## Indications

1 Pour interpréter le test de la ligne 5, il est nécessaire de lire la question 2.

2 La condition du `while` doit permettre de détecter les bons caractères de début de chaîne, par exemple à l'aide d'un slicing, ou l'arrivée à la fin de la liste. Attention à l'ordre dans lequel seront vérifiées ces deux conditions.

4 Il suffit de vérifier que la liste contient le bon nombre de chaînes et que celles-ci sont non vides.

5 Où se trouve la précision dans la liste `trame`, et sous quelle forme ?

6 Attention aux différents slicings présents dans ce code. Utiliser les annexes 2 et 3 pour comprendre la fonction `hex` et l'opérateur `^`, et les valeurs fournies par l'énoncé pour l'évaluation des `ord(ch)`.

7 Séparer les heures, minutes et secondes avec des slicings, puis effectuer les conversions nécessaires.

8 Utiliser le fait que les minutes occupent 8 caractères pour les isoler des degrés.

10 Les données fournies par l'énoncé permettent d'évaluer le nombre maximal de caractères sur une ligne. Ne pas oublier les caractères non numériques.

11 Comment peut-on représenter autrement une valeur numérique ?

12 La méthode des trapèzes permet d'obtenir l'approximation suivante

$$\int_t^{t+\mathrm{T}_e} (e(u) - s(u))\,\mathrm{d}u \simeq \mathrm{T}_e \times \frac{(e(t+\mathrm{T}_e) - s(t+\mathrm{T}_e) + e(t) - s(t))}{2}$$

13 Construire un tableau de la bonne taille et le remplir à l'aide d'une boucle en utilisant la question 12. On pourra poser $s(t_0) = e(t_0)$, non renseigné dans l'énoncé.

14 On continue d'exécuter la boucle tant que l'une des trois conditions données dans l'énoncé n'est pas respectée : attention aux opérateurs booléens utilisés.

15 Justifier notamment que la liste `pics` contient bien les indices des différents pics relevés dans la liste `signal` à l'issue de la boucle `while`.

16 Deux boucles imbriquées sont nécessaires dans cette fonction. Utiliser la constante `pi` et la fonction `exp` définies dans le module `numpy`.

19 Utiliser la fréquence d'échantillonnage pour relier l'intervalle de temps $\Delta t$ aux indices `indDepart` et `indFin` du programme.

20 Utiliser le comportement du filtre aux instants $\mathrm{T}_d$ et $\mathrm{T}_f$, ou l'expression de la fonction donnée dans l'énoncé.

23 Seule la table `activite` est nécessaire. Ne pas oublier les conversions.

24 Interpréter d'abord le contenu de la table `amis1`.

# I. Acquisition et traitement des données GPS

**1** L'instruction de la ligne 2 sépare les différentes lignes de la chaîne de caractères en entrée, en les stockant dans une liste nommée `chaineDecoupe`. L'instruction suivante permet de récupérer l'indice de la ligne correspondant à la trame GPGGA dans cette liste. Si cette trame est bien présente (test de la ligne 5), la ligne 6 permet de récupérer la ligne associée, à laquelle on enlève le premier symbole `$`. On en extrait ensuite les différentes informations dans une liste (ligne 7), sauf l'avant-dernière (ligne 8) qui correspond à un champ toujours vide d'après l'annexe 1.

> L'énoncé ne précisait pas à ce stade que le test de la ligne 5 permettait de vérifier la présence d'une trame GPGGA dans la liste. Cette information ne se trouve qu'à la question suivante expliquant le comportement de la fonction `indice_GPGGA` en cas d'absence d'une telle trame. D'où la nécessité de prendre un peu d'avance sur la lecture de l'énoncé (sans forcément le lire en intégralité) avant de se lancer.
>
> La méthode `pop`, utilisée à la ligne 8 pour la suppression du champ vide, n'était pas décrite dans l'annexe, probablement parce qu'elle figure implicitement au programme. En effet, lors de la représentation usuelle des piles par les listes Python, l'instruction `P.pop()` permet de dépiler un élément de `P` avec une complexité élémentaire. Néanmoins, cette méthode était utilisée ici avec un argument optionnel, correspondant à l'indice de l'élément à extraire, ce qui a pu perturber certains candidats.

**2** L'énoncé impose ici l'utilisation d'une boucle `while`. Cette boucle doit s'arrêter dès que l'on arrive à la fin de la liste, ou que l'on a trouvé une chaîne commençant par les caractères `'$GPGGA'`. Ce dernier test est réalisé ici à l'aide d'un slicing récupérant les 6 premiers caractères de la chaîne à tester.

```
def indice_GPGGA(listeChaine):
    i = 0
    while i < len(listeChaine) and listeChaine[i][:6] != '$GPGGA':
        i = i + 1
    return i
```

> L'ordre des deux conditions dans cette boucle `while` est crucial. Lorsque Python évalue une expression booléenne, il le fait de façon paresseuse, c'est-à-dire que si la condition `i < len(listeChaine)` n'est pas vérifiée, la condition de droite n'est pas évaluée. Une évaluation de cette condition dans le cas où `i = len(listeChaine)` aurait déclenché une erreur car l'élément `listeChaine[i]` n'existe pas. Remarquons enfin que dans ce cas, la fonction renvoie bien `len(listeChaine)`, comme demandé dans la question.

**3** La variable `donneesGPS` contient la chaîne reçue par le récepteur. On peut lui appliquer la fonction `recupererGPGGA` de la question 1 pour isoler la trame demandée.

```
listeGPGGABrute = recupererGPGGA(donneesGPS)
```

**4** On teste dans un premier temps si la trame est bien constituée de 14 éléments, puis on vérifie le cas échéant si aucune donnée de la liste ne correspond à la chaîne de caractères vide.

```
def testPresence(trame):
    if len(trame) != 14:
        return False
    for chaine in trame:
        if chaine == '':
            return False
    return True
```

> L'énoncé est ambigu sur la nécessité de vérifier la première condition : la liste `trame` est supposée avoir la même forme que la liste donnée en exemple `listeGPGGABrute` contenant 14 éléments, mais la question demande tout de même de vérifier que les données sont bien présentes.

**5** On remarque sur l'exemple donné dans l'énoncé que le coefficient de précision se trouve à l'indice 8 dans la liste des données de la trame, sous la forme d'une chaîne de caractères. Il suffit alors de comparer ce coefficient à la valeur 5, en prenant soin de le convertir en flottant au préalable.

```
def testPrecision(trame):
    return float(trame[8]) < 5
```

> Le coefficient de précision dont il est question ici permet de mesurer la qualité d'une mesure de position du récepteur GPS. Plus ce coefficient est grand, plus les satellites concernés dans cette détermination de position étaient proches lors de la mesure, ce qui augmente les incertitudes sur le relevé.

**6** L'instruction `somme = trame[-1][1 :]` permet de récupérer la dernière chaîne de la trame privée de son premier caractère, ce qui donne sur cet exemple `'A0'`.

Comme la liste `trame` ne contient que deux éléments, la boucle `for chaine in trame[:-1]` n'examine que la première chaîne de caractères de la trame, la seconde étant exclue à cause du slicing. Après initialisation, et à l'issue de la seconde boucle

```
for ch in chaine:
    cs = cs ^ ord(ch)
```

la variable `cs` contiendra, d'après l'annexe 3, le « ou exclusif » bit à bit des représentations entières des lettres de `chaine`, soit `ord('G') ^ ord('P') ^ ord('G')`. Cet opérateur est défini sur les bits par

`0 ^ 0 = 0`, `0 ^ 1 = 1`, `1 ^ 0 = 1` et `1 ^ 1 = 0`

On remarque que cette opération renvoie 1 s'il y a un nombre impair de bit égaux à 1, et renvoie 0 dans le cas contraire. À l'aide des valeurs fournies dans l'énoncé et de l'observation précédente, on obtient après calculs bit par bit :

`cs = '0b01000111' ^ '0b01010000' ^ '0b01000111' = '0b01010000'`

> On remarque qu'on retrouve la valeur donnée dans l'énoncé pour `ord('P')`, ce qui n'a rien d'une coïncidence. En effet, on peut montrer que l'opérateur « ou exclusif » est commutatif, associatif et vérifie `x ^ x` $= 0$ pour tout `x` (bit ou entier), ce qui permet de simplifier le calcul précédent :
>
> $$\begin{aligned} \texttt{cs} &= \texttt{ord('G') \^{} ord('P') \^{} ord('G')} \\ &= \big(\texttt{ord('G') \^{} ord('G')}\big)\ \texttt{\^{} ord('P')} \\ &= 0\ \texttt{\^{} ord('P')} \\ \texttt{cs} &= \texttt{ord('P')} \end{aligned}$$

# Centrale Maths 1 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Comment fonctionne Google ? Ce sujet décrit l'algorithme PageRank qui permet d'identifier les pages web les plus populaires. Pour cela, on réduit le web à un graphe orienté sur lequel on effectue une marche aléatoire. L'outil central est la notion de matrice stochastique, c'est-à-dire dont tous les coefficients sont positifs et dont la somme des termes d'une ligne vaut toujours 1.

- Dans la partie I, on établit des propriétés générales d'une marche aléatoire sur un graphe en situation d'équiprobabilité. Puis on applique ce modèle à deux exemples géométriques en explicitant les matrices de transition utilisées. On s'intéresse en particulier à la stabilité du comportement sur le temps long.
- La partie suivante introduit la notion de matrice stochastique, dont les matrices de transition vues à la partie I constituent des cas particuliers. Après avoir donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit stochastique, et avoir constaté des résultats de stabilité de l'ensemble des matrices stochastiques, on s'intéresse à leur spectre. Pour finir, on étudie la suite constituée des puissances d'une matrice stochastique. En établissant des inégalités sur ses coefficients, on obtient des résultats de convergence.
- Dans la partie III, on travaille sur le graphe du web puis sur l'algorithme PageRank. Cette partie contient des questions de programmation Python et de complexité algorithmique.

Ce sujet porte principalement sur l'algèbre linéaire. Il donne l'occasion de manipuler des suites de matrices. De manière inhabituelle, on multiplie le plus souvent des matrices par des vecteurs ligne à gauche plutôt que par des vecteurs colonne à droite.

## Indications

### Partie I

1 Utiliser la formule des probabilités totales.

2 Revenir à la définition de la matrice T et utiliser la formule des probabilités composées.

3 Raisonner par récurrence et utiliser le résultat de la question 2.

4 Passer à la limite dans les formules des questions 1 et 2.

6 La matrice de transition T de la question 5 est symétrique réelle. Trouver ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés pour conclure.

7 La matrice Q étant orthogonale, utiliser la formule de la question 6 pour calculer $\mathrm{T}^k$ puis passer à la limite pour $k$ tendant vers $+\infty$. Reconnaître alors la limite obtenue comme une projection sur un sous-espace propre de T.

8 Appliquer le résultat de la question 3 dans cette situation puis passer à la limite en utilisant la limite de la suite $(\mathrm{T}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue à la question 7 ainsi que le résultat de la question 4.

11 Raisonner par l'absurde.

### Partie II

12 Exprimer comme une somme chaque coefficient de $\mathrm{M}\,(1,\,\ldots,\,1)^{\mathrm{T}}$ puis revenir à la définition d'une matrice stochastique.

14 Écrire explicitement les coefficients du vecteur ligne XM comme des sommes. Sommer ensuite tous les coefficients de XM. Conclure en permutant les sommes finies.

15 Il y a deux méthodes possibles :

- appliquer le résultat de la question 14 à chacune des lignes de M ;
- utiliser la caractérisation de la question 12. Il faudra dans ce cas justifier la positivité des coefficients de MN.

17 Écrire $(\lambda - m_{h,h})u_h$ comme une somme. Majorer cette somme en module en utilisant la définition de $u_h$. Pour conclure, il faudra utiliser le fait que M est stochastique. L'inégalité $|\lambda| \leqslant 1$ s'obtient à partir de celle sur $|\lambda - m_{h,h}|$. Pour cela, il suffit de décomposer $\lambda = \lambda - m_{h,h} + m_{h,h}$.

18 Utiliser une astuce similaire à celle de la question 17 pour obtenir l'égalité souhaitée. Faire un dessin de la situation en utilisant un disque de centre d'affixe $\delta$. Pour la dernière partie de la question, noter que si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs alors $\delta > 0$ et se ramener au cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

20 Noter que la transposée d'une distribution de probabilité invariante est un vecteur propre de la transposée de M associé à la valeur propre 1. Que dire de la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M}^{\mathrm{T}} - \mathrm{I}_n)$ en utilisant la question 19 ?

21 Écrire explicitement les coefficients de $\mathrm{M}^{k+1} = \mathrm{M}\,\mathrm{M}^k$.

22 Définir $i_0$ à partir de $\alpha_j^{(k)}$ et $j_0$ à partir de $\beta_j^{(k)}$.

24 Faire apparaître $\beta_j^{(k)}$ et $\alpha_j^{(k)}$ puis utiliser les inégalités obtenues dans les questions 22 et 23.

25 Traiter à part le cas $n = 1$. Dans l'autre cas, utiliser l'inégalité obtenue à la question 24 pour montrer que la suite des différences $\left(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure en utilisant la définition des $\beta_j^{(k)}$ et $\alpha_j^{(k)}$. Penser à montrer que la limite obtenue est une matrice stochastique.

26 Noter que $(\alpha_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a supposé que les coefficients de M sont tous strictement positifs. Que peut-on en déduire pour $\alpha_j^{(1)}$ ?

27 Appliquer le résultat de la question 25.

28 Utiliser les résultats des questions 20 et 27.

## Partie III

30 Penser à appliquer les résultats des questions 13 et 16.

32 Appliquer les résultats de la partie II.C.2, en particulier ceux des questions 27 et 28, à la matrice B. Une des difficultés de cette question réside dans la compréhension des propriétés (i) et (ii). En voici une interprétation : pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![ 1\,;n ]\!]^2$ tel que la page $i$ pointe vers la page $j$,

(i) si $\mu_i$ augmente alors $\mu_j$ augmente ;

(ii) si $\lambda_i$ augmente alors la contribution de la page $i$ dans $\mu_j$ diminue.

35 Pour la complexité, on peut raisonner par récurrence. En particulier, il faut montrer que les bornes proposées sont atteintes dans le pire et dans le meilleur cas pour l'algorithme d'exponentiation rapide.

# I. Marche aléatoire sur un graphe

$\boxed{1}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i^{(k)}$ représente la probabilité que le point soit sur le sommet $i$ à l'étape de rang $k$. Comme il y a exactement $n$ sommets numérotés de 1 à $n$, l'ensemble constitué des événements

$$\{\text{Le point est sur le sommet } i\}$$

pour $i \in [\![1\,;n]\!]$ forme un système complet d'événements. Dès lors, la formule des probabilités totales assure que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1}$$

$\boxed{2}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Le vecteur ligne $\mathrm{P}^{(k)} = (p_i^{(k)})_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ est constitué des probabilités que le point soit sur le sommet $i$ à l'étape de rang $k$. Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i^{(k+1)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet $i$ à l'étape de rang $k+1$. Or, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $t_{j,i}$ représente la probabilité que le point soit sur le sommet $i$ à l'étape $k+1$ sachant qu'il était sur le sommet $j$ à l'étape $k$.

La formule des probabilités composées couplée à la formule des probabilités totales, dans le système complet d'événements $\{$Le point se situe sur le sommet $j\}$ pour $j \in [\![1\,;n]\!]$, assure que la probabilité que le point soit sur le sommet $i$ à l'étape de rang $k+1$ s'écrit

$$p_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} t_{j,i}$$

Ceci donne matriciellement

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}^{(k+1)} = \mathrm{P}^{(k)}\,\mathrm{T}}$$

$\boxed{3}$ Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad \mathrm{P}^{(k)} = \mathrm{P}^{(0)}\,\mathrm{T}^k$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car $\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}_n$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$ : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathrm{P}^{(k)} = \mathrm{P}^{(0)}\,\mathrm{T}^k$. D'après le résultat de la question 2 et $\mathscr{P}(k)$,

$$\mathrm{P}^{(k+1)} = \mathrm{P}^{(k)}\,\mathrm{T} = \mathrm{P}^{(0)}\,\mathrm{T}^k\,\mathrm{T} = \mathrm{P}^{(0)}\,\mathrm{T}^{k+1}$$

  ce qui prouve que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}^{(k)} = \mathrm{P}^{(0)}\,\mathrm{T}^k}$

$\boxed{4}$ On passe à la limite pour $k$ tendant vers $+\infty$ dans la formule de récurrence obtenue à la question 2. Par continuité du produit matriciel, il vient

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{P}\,\mathrm{T}}$$

De plus, par définition de $\mathrm{P}^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on sait que $p_i^{(k)} \geqslant 0$. Par passage à la limite quand $k$ tend vers $+\infty$,

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad p_i \geqslant 0}$$

# Centrale Maths 2 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Rémi Pellerin (ENS Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet est consacré à l'étude des suites, séries entières, fonctions et lois de probabilité dites *hypergéométriques*. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est hypergéométrique s'il existe deux polynômes réels non nuls P et Q tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(n)u_n = \mathrm{Q}(n)u_{n+1}$$

La série entière $\sum u_n x^n$ est alors également dite hypergéométrique.

- Afin de permettre au candidat de se familiariser avec ces définitions, la première partie considère quelques cas particuliers de suites hypergéométriques.
- La deuxième partie, indépendante de la première, consiste à étendre la factorielle par le biais de la fonction $\Gamma$. C'est un exercice classique et sans difficultés d'intégrales à paramètre que tout candidat bien préparé aura déjà croisé au moins une fois.
- La partie III exploite certains résultats des deux parties précédentes et constitue le cœur du sujet. Elle commence par définir le *symbole de Pochhammer* :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad [a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

  que l'on peut exprimer à l'aide de factorielles ou de la fonction $\Gamma$. La majorité du reste de la partie est consacrée à l'analyse des *fonctions hypergéométriques de Gauss* :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall c \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \mathrm{F}_{a,b,c} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n\,!}$$

  dont l'une des applications est la preuve de l'*identité de Vandermonde.*

  Cette partie s'achève en définissant les *fonctions hypergéométriques confluentes* comme des solutions particulières d'une équation différentielle.
- La partie IV s'appuie sur les précédentes pour donner un exemple de fonctions hypergéométriques confluentes, les *polynômes de Laguerre.*
- Enfin, la partie V, indépendante de la partie IV, donne un autre exemple d'application des premières parties en étudiant la *loi hypergéométrique* de paramètres $n$, $p$ et A (à valeurs dans $[\![\, 0\,;n\,]\!]$) de façon assez originale. Après une partie calculatoire exploitant les résultats établis précédemment, la loi est modélisée par un tirage sans remise. La fin de l'énoncé établit qu'une telle loi peut être approchée par une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ si A est assez grand.

Ce problème constitue un bon sujet de révision d'analyse et probabilités, en proposant également un soupçon d'algèbre linéaire. Un certain nombre de questions calculatoires demandent d'être à l'aise dans les manipulations de sommes et de coefficients binomiaux. C'est également un bon entraînement pour réussir à enchaîner les questions en tâchant de garder tout le sujet en tête.

## Indications

2 Distinguer les cas suivant les valeurs de $n$ et $p$.

3 Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

4 Raisonner par récurrence.

6 Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

7 Effectuer une intégration par parties.

8 Raisonner par récurrence.

11 Montrer que $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathrm{D} \qquad [a]_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$

15 Utiliser la règle de d'Alembert.

16 Dériver la somme terme à terme.

17 Calculer la dérivée seconde pour conjecturer la valeur de la dérivée $n$-ième, puis prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left]-1\,;1\right[ \qquad {\mathrm{F}_{a,b,c}}^{(n)}(x) = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\mathrm{F}_{a+n,b+n,c+n}(x)$$

18 Utiliser la question 10 pour simplifier l'expression puis reconnaître le développement en série entière de la fonction Arctan.

19 Développer la fonction donnée en série entière et remarquer que l'on obtient au signe près une fonction hypergéométrique de Gauss en posant $a = b = 1$ et $c = 2$.

20 Justifier l'existence à l'aide des questions 12 et 15 puis calculer sa valeur à l'aide du résultat admis dans l'énoncé et des questions 9 et 11.

21 Appliquer les résultats des questions 20 et 11.

22 Considérer une urne contenant $u$ boules blanches et $v$ boules noires et calculer de deux façons le nombre de tirages sans remise de $n$ boules dans cette urne.

23 Écrire une telle solution de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière et raisonner par équivalences.

25 Appliquer la formule de Leibniz à $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $g : x \mapsto x^n$.

27 Utiliser d'une part la question précédente et d'autre part la formule de Leibniz.

28 Utiliser la question 26.

29 Dériver l'expression de la question 27 avant de l'injecter dans le résultat de la question 28.

30 Appliquer les questions 29, puis 23 et 25.

32 Utiliser la formule rappelée dans l'énoncé puis la formule de Vandermonde.

33 Exprimer tout d'abord $\binom{m}{i+1}$ en fonction de $\binom{m}{i}$ pour tous entiers $m$ et $i$. Reconnaître ensuite les polynômes de la question 14. Il y a probablement une erreur d'énoncé : il paraît nécessaire d'ajouter l'hypothèse $q\mathrm{A} \geqslant n$.

35 Évaluer la probabilité demandée par dénombrement.

36 Exprimer $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_{p\mathrm{A}}$ puis calculer la loi des $\mathrm{Y}_i$ par dénombrement.

38 Exprimer la variance de Y en fonction des variances et covariances des $\mathrm{Y}_i$, puis utiliser la formule de Huygens et la question 37.

39 Regrouper les factorielles ensemble pour trouver un équivalent de $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ quand A tend vers l'infini.

40 Conclure à l'aide des questions 39, 36 et 38.

# I. Suites et séries hypergéométriques

**1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad qu_n = u_{n+1}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(n)u_n = \mathrm{Q}(n)u_{n+1}$$

en notant $\mathrm{P} = q$ et $\mathrm{Q} = 1$, qui sont bien deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Si $q = 0$, $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Les deux polynômes $\mathrm{P} = \mathrm{X} = \mathrm{Q}$ sont bien non nuls et vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(n)u_n = \mathrm{Q}(n)u_{n+1}$$

Par suite, $\boxed{\text{Une suite géométrique est hypergéométrique.}}$

**2** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\dbinom{n}{p}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geqslant p$, alors

$$u_{n+1} = \binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)\,!}{p\,!(n+1-p)\,!} = \frac{n+1}{n+1-p} \times \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!} = \frac{n+1}{n+1-p} \times u_n$$

  d'où

$$(n+1-p)u_{n+1} = (n+1)u_n$$

- Si $n \leqslant p-2$, alors $u_n = u_{n+1} = 0$, donc la relation précédente reste vraie.
- Enfin, si $n = p-1$, alors $u_n = 0$ et $(n+1-p)u_{n+1} = 0$, donc la relation est toujours vérifiée.

Finalement, en posant $\mathrm{P} = \mathrm{X}+1$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}+1-p$, qui sont bien deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(n)u_n = \mathrm{Q}(n)u_{n+1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la suite de terme général } u_n = \binom{n}{p} \text{ est hypergéométrique.}}$$

**3** Notons E l'ensemble des suites vérifiant la relation (I.1), avec

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$$

et montrons que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Cela montrera alors que c'est en particulier un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite identiquement nulle est incluse dans E.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par définition de E, on a $\mathrm{P}(n)u_n = \mathrm{Q}(n)u_{n+1}$ et $\mathrm{P}(n)v_n = \mathrm{Q}(n)v_{n+1}$, donc

$$\mathrm{P}(n)(u_n + \lambda v_n) = \mathrm{Q}(n)(u_{n+1} + \lambda v_{n+1})$$

  ce qui montre que $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'ensemble E des suites vérifiant la relation (I.1),}\\ \text{avec } \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) \text{ et } \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)\\ \text{est un espace vectoriel.}\end{array}}$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}$. Par définition de E,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n(n-1)(n-2)u_n = n(n-2)u_{n+1}$$

En considérant successivement $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n \geqslant 3$, il vient

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ u_2 = 0 \\ (n-1)u_n = u_{n+1} \qquad \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

On montre alors par récurrence immédiate que

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ u_2 = 0 \\ u_3 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = (n-1)!\,u_3 \qquad \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

donc $\dim(\mathrm{E}) = 3$. Définissons la famille $(a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \; n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \; n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \; n \leqslant 2 \\ (n-2)! & \text{sinon} \end{cases}}$$

Il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

ce qui prouve que $$\mathrm{E} \subset \mathrm{Vect}\,(a, b, c)$$

En outre, il est facile de vérifier que $(a, b, c) \in \mathrm{E}^3$ car elles vérifient la relation (I.1). Par suite,

$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(a, b, c)$$

La famille $(a, b, c)$ de cardinal 3 est donc une famille génératrice de E, qui est de dimension 3, d'où

$$\boxed{\text{La famille } (a, b, c) \text{ est une base de l'espace vectoriel E, qui est de dimension 3.}}$$

> Si l'on n'avait pas remarqué que $\dim(\mathrm{E}) = 3$, il suffisait de montrer que la famille $(a, b, c)$ est libre. Pour cela, considérons $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que
>
> $$\lambda a + \mu b + \nu c = 0$$
>
> et évaluons cette relation en $n = 0$, $n = 1$ et $n = 3$. Il vient $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc la famille est libre.

**4** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q. Notons $n_0$ l'entier défini dans l'énoncé et montrons, par récurrence sur $n$, que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \qquad u_n = 0$$

est vraie pour tout $n \geqslant n_0 + 1$.

# Centrale Informatique MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet a pour objectif la réalisation d'une image en deux dimensions représentant une scène simple, composée de plusieurs sources lumineuses et de plusieurs objets, choisis sphériques pour simplifier le problème. Il permet d'aborder une technique très efficace de fabrication d'images virtuelles et demandant peu de ressources. Les structures manipulées sont des tableaux `numpy` et des fonctions sont données pour en faciliter l'usage.

- La partie I permet la construction des fonctions élémentaires de géométrie et des premiers objets optiques tels que rayons, sphères et intersections des deux.
- Dans la partie II, l'étude évolue vers la problématique de la visibilité d'une source lumineuse depuis un point d'une sphère et de la couleur obtenue compte tenu de la lumière de la source et de l'incidence du rayon lumineux.
- La partie III, indépendante du reste de l'énoncé, demande de traiter l'enregistrement des données relatives à une scène (positions et couleurs des objets et des sources) au sein d'une base de données. C'est l'occasion de poser quatre questions de langage SQL d'un niveau très progressif.
- L'étude entre dans le vif du sujet à la quatrième partie, avec la modélisation du « lancer de rayons », considération physiquement fausse mais compatible avec la réalité qui consiste à imaginer que les rayons lumineux partent de l'œil. On modélise ces rayons et leur première intersection avec les objets de la scène, puis on étudie la couleur vue et la projection de cette même scène sur un écran en deux dimensions.
- La partie V, plus difficile que les précédentes, demande de ne pas se perdre dans les notations et le concept de rayon lumineux se réfléchissant d'une surface à l'autre. Les deux dernières questions portent sur une optimisation qui reste quelque peu théorique par rapport au reste du sujet.

Ce sujet donne une bonne idée de ce que l'on peut faire avec des outils informatiques, sur le thème assez pratique de la réalisation d'images de synthèse. Il est globalement bien mené et progressif, tous les concepts sont parfaitement définis. Il ne contient que de la manipulation assez simple de tableaux `numpy`, accessible dès la première année. Il a le grand intérêt de faire produire quasiment l'ensemble du code nécessaire à la mise en œuvre : le lecteur intéressé pourra rapidement s'amuser à créer lui-même des images. La fin du sujet réserve des questions plus délicates pour les candidats plus à l'aise.

# Indications

## Partie I

1 Bien lire les paragraphes précédant la question, notamment à propos de la représentation des points et des vecteurs.

2 Lire attentivement l'annexe et les fonctions du module `numpy` autorisées.

5 Le mot-clé `assert` permet la vérification de la condition donnée et arrête l'exécution si elle n'est pas vérifiée.

8 Il faut résoudre l'équation précédente. On peut remarquer que les deux solutions possibles doivent obligatoirement être positives.

## Partie II

10 Faire un dessin en deux dimensions et regarder les vecteurs présents.

11 Il faut chercher les intersections du rayon partant de la source lumineuse et passant par P. Ne pas oublier que les sphères plus éloignées de la source que P n'interviennent pas.

12 Le code à produire est très court, il suffit de traduire la relation (2) de l'énoncé. Le cosinus de $\theta$ peut être obtenu d'après le schéma par un produit scalaire.

13 Faire un schéma en deux dimensions et décomposer $\overrightarrow{u}$ sur l'axe de $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et l'axe orthogonal.

## Partie III

14 Pour récupérer l'année, utiliser une fonction donnée en annexe.

16 Regarder où se trouvent les données permettant la sélection et celles nécessaires à la projection, puis déterminer comment joindre les tables concernées.

17 La fonction `OCCULTE` demande deux identifiants d'objets indépendants, il faut donc joindre deux fois la table `Objet` en les renommant.

## Partie IV

18 Déterminer le lien entre $x$ et $j$, puis entre $y$ et $i$. Pour cela, faire un schéma représentant les cases et le centre de la figure, pour une valeur de N faible. Attention, sur la figure de l'énoncé $i$ et $j$ ne sont pas en face de $\mathrm{E}(i, j)$.

20 Pour retourner le point d'intersection le plus proche et l'indice de l'objet correspondant, il est nécessaire de récupérer toutes les intersections avec la distance à l'œil, le point de contact et l'indice de l'objet afin de conserver les bonnes valeurs.

21 Le calcul de couleur diffusée depuis une source par un point de sphère a déjà été fait à la question 12. Il suffit d'ajouter les couleurs correspondant aux différentes sources, sans oublier de vérifier si elles sont bien visibles.

## Partie V

25 Une boucle `while` ou `for` est possible. À chaque itération, si l'interception du rayon existe, on la stocke et on continue.

26 La relation donnée dans l'énoncé implique que l'on doit parcourir le tableau des réflexions en partant de la fin.

27 Reprendre la fonction `lancer` et regarder ce que `couleur_perçue` y modifie.

29 Créer l'ensemble des triplets {`objr_id`, `so_id`, `objo_id`}. Utiliser l'opérateur `in` pour vérifier leur présence dans la liste `risque`.

30 Reprendre la fonction `visible` et l'adapter. Attention à l'ordre des arguments.

# I. Géométrie

**1** La fonction `vec` calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en soustrayant les coordonnées du point A à celles du point B.

```
def vec(A, B):
    return B - A
```

> L'énoncé dit explicitement que retrancher deux vecteurs est réalisé par l'opération `v1 - v2` et que les vecteurs, comme les points, sont représentés par des tableaux. Il fallait donc éviter d'écrire une boucle ici.

**2** La fonction `ps` calcule le produit scalaire de deux vecteurs, somme des produits terme à terme de leurs composantes, ce que fait précisément la fonction `np.inner`.

```
def ps(v1, v2):
    return np.inner(v1, v2)
```

> La méthode `inner` du module `numpy` est donnée dans l'annexe et sa description correspond exactement au produit scalaire. Il est néanmoins possible de réaliser cette opération autrement, notamment en faisant la somme des composantes du produit de Hadamard des deux vecteurs :
>
> ```
> def ps(v1, v2):
>     return np.sum(v1 * v2)
> ```
>
> La réalisation de ce calcul par une boucle, demandant beaucoup plus d'écriture, a certainement été acceptée par les correcteurs, mais ce n'est visiblement pas la réponse attendue. On peut écrire par exemple
>
> ```
> def ps(v1, v2):
>     somme = 0
>     for i in range(len(v1)):
>         somme += v1[i] * v2[i]
>     return somme
> ```

**3** La fonction `norme` calcule la racine carrée du produit scalaire du vecteur par lui-même.

```
def norme(v):
    return math.sqrt(ps(v, v))
```

**4** La fonction `unitaire` retourne le vecteur unitaire correspondant à l'argument, en utilisant le produit d'un scalaire et d'un vecteur.

```
def unitaire(v):
    return (1/norme(v)) * v
```

**5**

> Le mot-clé `assert` n'est pas au programme et sa présence dans un code d'une des premières questions du sujet a pu décontenancer un certain nombre d'étudiants. Cette instruction correspond à la vérification de la condition donnée, à savoir est-ce que `t` est positif ou non. Si c'est le cas, l'instruction ne fait rien. Si non, elle *lève* une erreur, et l'utilisateur obtient alors le message `AssertionError` avant un arrêt immédiat de l'exécution.

La fonction `pt` permet de calculer, pour un rayon lumineux `r` $= (\mathrm{S}, \overrightarrow{u})$ et un entier `t` donnés, la position du point M du rayon tel que $\overrightarrow{\mathrm{SM}} = t\,\overrightarrow{u}$. Elle ne fonctionne, comme indiqué dans la description donnée dans l'énoncé, que pour $t \geqslant 0$, car $t$ est la distance séparant M de la source, dans la direction définie par $\overrightarrow{u}$.

La fonction `dir` définit le vecteur unitaire associé au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc au rayon passant par les points `A` et `B` et allant de `A` vers `B`.

La fonction `ra` définit le rayon lumineux partant du point `A` et passant par `B`.

**6** La fonction `sp` crée la représentation de la sphère de centre `A` et passant par `B`.

```
def sp(A, B):
    return A, norme(vec(A, B))
```

**7** On considère un point M appartenant à la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Cela signifie qu'il existe un réel $t$ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\overrightarrow{u}$$

Ce point M appartient à la sphère de centre C et de rayon $r$ si et seulement si la distance MC vaut $r$, soit $\|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|^2 = \overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = r^2$. Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} &= \big(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\big) \cdot \big(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\big) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} &= \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 + t^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \big(t\,\overrightarrow{u}\big)
\end{aligned}$$

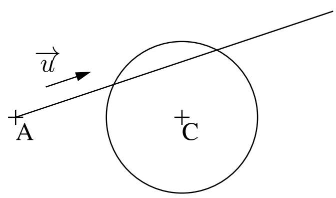
On trouve ainsi que $\boxed{t^2 + 2\,t\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 - r^2 = 0}$

Cette équation est un trinôme du second degré. Si son discriminant est strictement positif, elle a deux solutions réelles correspondant aux deux intersections de la droite et de la sphère. Un discriminant nul indique une unique solution réelle double, correspondant à une droite tangente à la sphère. Enfin, dans le cas d'un discriminant strictement négatif, les solutions ne sont pas réelles, la droite et la sphère ne sont alors pas sécantes.

**8** L'équation déterminée ci-dessus a des solutions réelles si

$$\Delta = 4\big(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}\big)^2 - 4\big(\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 - r^2\big) \geqslant 0$$

De plus, avec A à l'extérieur de la sphère, le schéma ci-contre montre que les deux solutions doivent être positives. Il faut donc que leur produit et leur somme soient positifs. Dans un trinôme de la forme $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, le produit des racines vaut $c/a$ et la somme $-b/a$. La condition sur le produit est déjà réalisée si A est à l'extérieur de la sphère. Celle sur la somme rend nécessaire la condition




$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} < 0$$

Si c'est le cas, il faut alors retourner la plus petite solution des deux, soit

$$t = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

# Mines Maths 1 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Michel (professeur agrégé) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet traite d'une classe de variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion, plus précisément celles qui satisfont la condition suivante pour un $\alpha > 0$ :

$$(\mathcal{D}_\alpha) \qquad \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ce type de condition n'est pas fréquent en prépa : elle n'est satisfaite par aucune loi usuelle au programme ! Pour des variables aléatoires entières, la quantité $\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big)$ reste familière puisqu'elle est utilisée pour exprimer l'espérance de $|\mathrm{X}|$. On la retrouve également dans les inégalités de Markov et de Bienaymé–Tchebychev.

- La première partie comporte deux questions de cours qui seront utilisées plus tard.
- Dans la deuxième partie, on démontre des résultats généraux sur les variables aléatoires satisfaisant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ ainsi que sur les variables aléatoires symétriques.
- La troisième partie est indépendante de la précédente. Sans que l'énoncé ne le mentionne, elle est consacrée à l'étude de la série entière $z^n/n$ sur le cercle unité. Après avoir démontré la convergence de cette série sur le disque unité privé de 1, l'étude d'une intégrale à paramètre permet d'obtenir l'expression de la somme de la série entière $z^n/n$ pour $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\theta \in \,]\,0\,;2\pi\,[$. Cette partie constitue une bonne révision du cours sur les intégrales à paramètre.
- Dans la partie suivante, on définit la fonction caractéristique $\Phi_\mathrm{X}$ d'une variable aléatoire symétrique X. On en démontre des propriétés élémentaires puis, lorsque la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ est vérifiée, on prouve que $\Phi_\mathrm{X}$ n'est pas dérivable en 0. Pour cela, on utilise les résultats des parties précédentes ainsi qu'une méthode standard dans l'étude de séries semi-convergentes : la transformation d'Abel.
- Dans la cinquième partie, on applique un schéma classique d'étude de la suite des fonctions caractéristiques des moyennes empiriques d'une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi en démontrant une propriété de morphisme puis la convergence simple.

Pour réussir ce sujet, il fallait maîtriser les séries de fonctions et les intégrales à paramètre, ainsi que les définitions et propriétés essentielles de l'espérance en probabilités. On utilise à plusieurs reprises les théorèmes de continuité de la somme d'une série de fonctions, de convergence dominée et de dérivation des intégrales à paramètre, ce qui en fait un bon sujet de révision des chapitres d'analyse de deuxième année et de probabilités.

## Indications

3 Comme $|\mathrm{X}|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big)$ est convergente.

4 Appliquer le théorème 1 admis par l'énoncé.

5 Montrer que les couples $(-\mathrm{X}, -\mathrm{Y})$ et $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ suivent la même loi puis appliquer le théorème 1 avec une fonction $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ bien choisie.

6 Montrer que l'intégrande est continue sur $[\,0\,;1\,]$. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L est de classe $\mathscr{C}^n$ et

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{L}^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!\,z^n}{(1-tz)^n}$$

7 Utiliser l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

8 Appliquer le résultat de la question 7 pour obtenir la première limite puis montrer que la fonction $t \in [\,0\,;1\,] \mapsto |1-tz|$ admet un minimum strictement positif.

9 Utiliser les questions 6 et 8 ainsi que la formule de Taylor avec reste intégral.

10 Justifier que, pour $a \in \,]\,0\,;\pi\,[$, la fonction continue $\gamma$ atteint son minimum sur $[\,-a\,;a\,] \times [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il est strictement positif à l'aide de la question 7.

11 Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur tout segment de la forme $[\,-a\,;a\,]$ avec $a \in \,]\,0\,;\pi\,[$ grâce à la question 10. Montrer que

$$\forall t \in \,]\,-\pi\,;\pi\,[ \qquad \mathrm{F}'(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}}{(1+u\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t})^2}\,\mathrm{d}u$$

12 Calculer $\mathrm{F}'$ en mettant l'intégrande sous la forme $g'/g$. Montrer, en intégrant l'expression de $\mathrm{F}'$ obtenue, que

$$\forall t \in \,]\,-\pi\,;\pi\,[ \qquad \mathrm{F}(t) = \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}\,t}{2}$$

13 Justifier que l'on peut appliquer la question 9 avec $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\,\theta}}{n} = -\mathrm{F}(\theta-\pi)$$

16 Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1} = \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| = n\big)$. Déduire la première formule voulue du théorème de transfert. Obtenir la seconde formule en raisonnant sur les sommes partielles, en coupant la somme initiale en deux et en effectuant un changement d'indice dans l'une des sommes.

17 Obtenir la limite souhaitée en démontrant que la somme de gauche définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Conclure grâce aux résultats des questions 9 et 13.

18 Utiliser les résultats des questions 16 et 17 et la formule de trigonométrie

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Déduire du développement limité obtenu en $0^+$ un développement limité en $0^-$.

20 Raisonner par récurrence grâce à la question 19 en écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{M}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\mathrm{M}_n + \frac{1}{n+1}\mathrm{X}_{n+1}$$

21 Appliquer les résultats des questions 18, 20 puis 14.

22 Montrer que $\Phi_{\mathrm{M}_n}(2n\pi) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ grâce à la question 20.

## I. Questions de cours

**1** La définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète varie selon que l'image de X est un ensemble fini ou non. Distinguons deux cas.

- 1^er^ cas : Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est finie, alors X est d'espérance finie.
- 2^e^ cas : Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est infinie et dénombrable, alors en notant $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, on dit que X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ converge absolument.

Démontrons à présent l'équivalence demandée en distinguant ces deux cas.

- 1^er^ cas : $\mathrm{X}(\Omega)$ est finie. Alors l'image de $\Omega$ par $|\mathrm{X}|$ est également finie, car c'est l'image de l'ensemble fini $\mathrm{X}(\Omega)$ par l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. D'après la définition qui précède, $|\mathrm{X}|$ est d'espérance finie.
- 2^e^ cas : Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est infinie et dénombrable, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $|\mathrm{X}|$ est d'espérance finie si et seulement si, avec les notations précédentes, $\sum |x_n| \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ converge absolument. La probabilité $\mathbb{P}$ prenant des valeurs positives ou nulles, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_n|\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = \big|x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)\big|$$

  Par conséquent, la convergence absolue de la série $\sum |x_n|\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$, c'est-à-dire au fait que X est d'espérance finie.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{X est d'espérance finie si et seulement si } |\mathrm{X}| \text{ l'est aussi.}}$$

**2** On suppose que X est bornée : soit $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}\big) = 1$. Lorsque $\mathrm{X}(\Omega)$ est finie, X est d'espérance finie, indépendamment du fait qu'elle soit bornée. Supposons désormais que $\mathrm{X}(\Omega)$ est infinie dénombrable. En notant $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, comme $\mathbb{P}$ est positive,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \big|x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)\big| \leqslant \mathrm{M}\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- soit $|x_n| \leqslant \mathrm{M}$ ;
- soit $|x_n| > \mathrm{M}$ et dans ce cas $\{\mathrm{X} = x_n\} \subset \big\{|\mathrm{X}| > \mathrm{M}\big\}$ d'où l'on déduit, par croissance de $\mathbb{P}$, que $0 \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) \leqslant \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| > \mathrm{M}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}\big) = 0$, et finalement $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) = 0$.

Dans tous les cas, l'inégalité ci-dessus est vraie. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ est convergente (par définition de la loi de X), on en déduit que la série $\sum x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$ est absolument convergente. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si X est bornée, alors X est d'espérance finie.}}$$

## II. Généralités sur les variables aléatoires

Nous allons étudier des variables aléatoires entières symétriques vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ pour un $\alpha > 0$. Il convient donc de se demander s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une variable aléatoire entière symétrique X tels que $(\mathcal{D}_\alpha)$ est vérifié.

Considérons une variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}$$

Ainsi définie, X est une variable aléatoire entière symétrique sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{P})$.
Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Or, comme la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \geqslant n \qquad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

soit $$\forall k \geqslant n \qquad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On reconnaît dans les membres de gauche et de droite des termes généraux de séries télescopiques, donc on obtient en sommant

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - 1/n} = \frac{1}{n} \times \left(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

d'où $$\frac{6}{n\pi^2} \leqslant \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) \leqslant \frac{6}{n\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$ avec $\alpha = 6/\pi^2$.

La question suivante se pose alors : Soit $\alpha > 0$. Existe-t-il une variable aléatoire entière symétrique $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(\mathcal{D}_\alpha)$ ? On peut vérifier que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\alpha}{n+1} & \text{si } n > \alpha \\[2mm] 1 - \dfrac{\alpha}{\lfloor \alpha \rfloor + 1} & \text{si } n = 0 \\[2mm] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive et vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En raisonnant comme précédemment, on démontre que la variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - \frac{\alpha}{\lfloor \alpha \rfloor + 1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{p_{|n|}}{2}$$

est alors une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$ : l'énoncé n'est pas en train de parler de choses qui n'existeraient pas !

# Mines Maths 2 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bosch (professeur en CPGE) ; il a été relu par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce problème porte sur l'étude des noyaux de type positif. Ces noyaux sont des applications $\mathrm{K} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega$ désignant un ensemble quelconque) pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n$, la matrice $(\mathrm{K}(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique à valeurs propres positives. Cela généralise donc la notion de matrice symétrique réelle à spectre positif (correspondant au cas où $\Omega$ est fini) en dimension infinie.

- La première partie est consacrée à la démonstration de résultats préliminaires qui serviront tout au long du problème : on démontre le théorème de Fubini, qui permet de manipuler des intégrales doubles, et on généralise le théorème des sommes de Riemann à des fonctions de plusieurs variables.
- La notion de noyau de type positif (en abrégé NTP) est introduite dans la deuxième partie. On y démontre une autre représentation de ces NTP dans deux cas particuliers : K est un NTP si, et seulement si, il peut s'écrire sous la forme $\mathrm{K}(x, y) = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y) \rangle_{\mathrm{H}}$ où H est un espace préhilbertien et $\varphi : \Omega \to \mathrm{H}$ est une application.
- Dans la dernière partie, on commence par étudier certaines propriétés générales d'un opérateur (c'est-à-dire d'une application linéaire) à noyau de type positif : on montre que cet opérateur est continu, symétrique, et admet une famille orthonormale de vecteurs propres, tous associés à des valeurs propres positives (généralisant en quelque sorte le théorème spectral). On étudie ensuite sur un exemple la décomposition spectrale d'un opérateur à noyau de type positif, et on démontre sur ce même exemple un résultat appelé formule de la trace.

Dans ce sujet, on aborde les notions suivantes : espaces vectoriels normés en dimension finie et infinie, espaces préhilbertiens et euclidiens, intégrales à paramètre, suites et séries, équations différentielles.

Le sujet est assez calculatoire. On y retrouve des questions classiques où l'on applique les principaux théorèmes du programme : les théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales à paramètre, le théorème spectral, etc., mais également des questions plus difficiles qui sont à la limite du programme de PSI.

# Indications

### Quelques résultats préliminaires

5 Avec la question 4, reconnaître l'intégrale $\displaystyle\int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u$ et appliquer le théorème fondamental de l'analyse.

6 Utiliser le fait que $\mathrm{S}_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$.

### Noyaux de type positif

9 Considérer l'endomorphisme $f$ canoniquement associé à la matrice symétrique $\mathrm{Cov}_{\mathrm{K}}(x_1,\dots,x_n)$ puis diagonaliser $f$ dans une base orthonormale de vecteurs propres pour introduire un endomorphisme symétrique $g$ tel que $g^2 = f$.

12 Montrer que si $u_{\mathrm{K}} = u_{\mathrm{K}'}$, alors pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $\mathrm{K}_x - \mathrm{K}'_x$ est orthogonal à tout élément de E.

### Opérateurs à noyau

13 Ne pas oublier de justifier que $x \mapsto \langle \mathrm{K}_x \mid f\rangle$ est bien élément de E puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer la continuité de $u_{\mathrm{K}}$.

14 Utiliser le résultat de la question 5 pour montrer que $u_{\mathrm{K}}$ est symétrique.

15 Utiliser la question 6 et les notations qui la précède puis exprimer à l'aide de la question 1 la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{K}(u_k,t_\ell)f(u_k)f(t_\ell)$$

16 Montrer l'unicité et l'existence séparément. Pour dériver $u_{\mathrm{K}}(f)$, appliquer la relation de Chasles à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

17 Raisonner par analyse et synthèse : supposer que $f$ est un vecteur propre de $u_{\mathrm{K}}$ de valeur propre associée $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et trouver une équation différentielle linéaire dont $f$ est solution.

18 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(x,t)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

19 Développer $\|\mathrm{K}_x - p_n(\mathrm{K}_x)\|_2{}^2$ et écrire $p_n(\mathrm{K}_x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle \mathrm{K}_x \mid e_k\rangle e_k$.

20 Montrer que $u_{\mathrm{K}}(f)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k(x) = \langle \mathrm{K}_x - p_n(\mathrm{K}_x) \mid f\rangle$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

21 Montrer que la série de fonctions $\sum \lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k$ converge normalement sur $[\,0\,;1\,]$ puis utiliser le fait que $\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$.

22 Ne pas oublier de montrer que $\mathrm{K}'$ est continu sur $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;1\,]$. Démontrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, la suite

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e_k(x)e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge pour la norme $\|\ \|_2$ et utiliser à nouveau le fait que $\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$.

## Quelques résultats préliminaires

**1** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; notons $X^\top A = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. Pour tout $j \in [\![ 1 ; n ]\!]$, on a

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j}$$

donc
$$X^\top AX = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j} x_j$$

En permutant ces deux sommes finies, on obtient alors

$$\boxed{X^\top AX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j}$$

> On identifie ici une matrice de type $(1,1)$ à un scalaire. La matrice $X^\top AX$ est en effet de type $(1,1)$ car $X^\top$ est de type $(1,n)$, A est de type $(n,n)$ et X est de type $(n,1)$.

**2** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La matrice A étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral, le spectre de A est contenu dans $\mathbb{R}$ (et A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Montrons que $\lambda$ est positif (ou nul). Considérons un vecteur propre de A

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

associé à la valeur propre $\lambda$. Puisque A est une matrice symétrique (réelle) positive, on a

$$X^\top AX = X^\top \lambda X = \lambda X^\top X = \lambda \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \geqslant 0$$

Comme X est un vecteur propre, X est non nul, donc la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2$ est strictement positive et on en déduit $\lambda \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres d'une matrice de } \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ sont des réels positifs ou nuls.}}$$

**3** Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. La fonction $f$ est continue sur $[\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$ qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ ; donc d'après le théorème des bornes, la fonction $f$ est bornée sur $[\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (u,t) \in [\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,] \qquad |f(u,t)| \leqslant M$$

On applique maintenant le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour tout $t \in [\,c\,;d\,]$, $u \mapsto f(u,t)$ est continue par morceaux sur $[\,a\,;x\,]$.
- Pour tout $u \in [\,a\,;x\,]$, $t \mapsto f(u,t)$ est continue sur $[\,c\,;d\,]$.
- La fonction $h : [\,a\,;x\,] \to \mathbb{R}_+$ constante égale à M est positive, continue (donc continue par morceaux), intégrable sur $[\,a\,;x\,]$ et l'on a $|f(u,t)| \leqslant h(u)$ pour tout $(u,t) \in [\,a\,;x\,] \times [\,c\,;d\,]$.

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$ est donc continue sur $[\,c\,;d\,]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [\,a\,;b\,], \text{ la fonction } t \mapsto \varphi(x,t) \text{ est continue sur } [\,c\,;d\,].}$$

**4** Appliquons cette fois le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,c\,;d\,]$ car continue d'après la question précédente.
- Pour tout $t \in [\,c\,;d\,]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ car c'est la primitive s'annulant en $a$ de la fonction continue $x \mapsto f(x,t)$.
- Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Pour tout $t \in [\,c\,;d\,]$, on a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$. La fonction $f$ étant continue sur $[\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$, en particulier $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,c\,;d\,]$.
- Pour tout $(x,t) \in [\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$, on a
$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = |f(x,t)| \leqslant \mathrm{M}$$
où M est le majorant de $|f|$ obtenu dans la question précédente. La fonction constante $t \mapsto \mathrm{M}$ est de plus intégrable sur $[\,c\,;d\,]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } \psi : x \mapsto \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est donc de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\,a\,;b\,] \text{ et} \\ \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \psi'(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

**5** Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. D'une part,

$$\psi(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la question 4 et le théorème fondamental de l'analyse, on obtient

$$\int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u = \psi(x) - \psi(a)$$

Or
$$\psi(a) = \int_c^d \varphi(a,t)\,\mathrm{d}t$$

et
$$\forall t \in [\,c\,;d\,] \qquad \varphi(a,t) = \int_a^a f(u,t)\,\mathrm{d}u = 0$$

d'où $\psi(a) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t}$$

# Mines Informatique MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet se compose de trois exercices indépendants dont le point commun est le mot « marche » :

- La partie I s'intéresse aux randonnées, prétexte à quelques questions de SQL puis à divers calculs avec les données recueillies par GPS lors d'une balade. La seconde sous-partie se compose de questions de programmation, assez progressives et faisant intervenir des classiques du programme de classes préparatoires, comme la recherche d'un maximum dans une liste.
- La brève partie suivante porte sur la marche brownienne d'une petite particule. La thématique abordée est celle du calcul numérique, principalement autour des schémas d'Euler, et propose une approche originale et élégante par vecteurs d'état.
- Le dernier exercice aborde la marche auto-évitante, c'est-à-dire la formation sur un quadrillage d'un chemin qui ne se recoupe jamais. Ceci permet par exemple de modéliser des chaînes de polymères. L'objectif du sujet était de tester la compréhension d'algorithmes, de les programmer et d'étudier leur complexité. La dernière question, plus ouverte, permettait d'évaluer plus finement les candidats.

Ce sujet original peut être abordé dès la fin de la première année car il ne comporte qu'une question portant sur le programme de seconde année (la question 18, sur la complexité d'un tri). Il fait appel à de nombreuses notions de programmation, nécessite de bien maîtriser les algorithmes de base comme la recherche d'un maximum ou le schéma d'Euler, et est très progressif. C'est un très bon sujet de révision, clair et bien posé, qui permettait de trier efficacement les candidats.

## Indications

2 Utiliser `GROUP BY` si cette instruction est connue, sinon utiliser des unions de requêtes.

3 Utiliser par exemple une requête imbriquée.

4 Réaliser une autojointure, c'est-à-dire la jointure d'une table avec elle-même, en prenant soin de renommer les grandeurs dont on a besoin.

5 Attention au passage des éléments en flottants, car ce sont des chaînes de caractères lorsqu'ils sont extraits du fichier.

8 Ne pas lésiner sur le nombre d'étapes dans la décomposition, le sujet le demande explicitement ! Attention aussi car le rayon terrestre est une variable globale donnée en kilomètres.

9 On peut ici utiliser la fonction de la question 8, même si on n'a pas réussi à la programmer.

10 Un exemple d'utilisation et de syntaxe de `assert` est donné dans l'annexe de cette partie.

11 Il faut regarder chaque composante du vecteur : certaines sont déjà disponibles, d'autres peuvent être déduites de l'équation différentielle.

13 Quelles sont les coordonnées des points voisins d'un point fixé ?

14 Il faut trouver un chemin qui entoure le plus vite possible un point, afin que celui-ci devienne forcément un chemin non auto-évitant.

16 La complexité recherchée dépend de celle de la fonction `positions_possibles`. Il faut donc tout d'abord étudier celle-ci, en fonction de la taille du paramètre d'entrée `atteints`.

19 Supposons que le chemin soit trié, quelle propriété a-t-on alors pour la liste associée si le chemin n'est pas un CAE ?

20 Un petit dessin permet de définir les relations entre les coordonnées des points utilisés.

22 Appliquer directement l'algorithme décrit dans le sujet.

## I. Randonnée

$\boxed{1}$ On peut proposer par exemple

```
SELECT COUNT(*)
FROM Participant
WHERE ne >= 1993 AND ne <= 2003;
```

> Il aurait été acceptable de proposer, sous réserve de connaître le mot-clef `BETWEEN`,
>
> ```
> SELECT COUNT(*)
> FROM Participant
> WHERE ne BETWEEN 1993 AND 2003;
> ```

$\boxed{2}$ Cette deuxième requête demande de réunir les enregistrements de même difficulté afin de calculer par agrégation de leurs durées moyennes. On peut donc proposer

```
SELECT diff, AVG(duree)
FROM Rando
GROUP BY diff;
```

> Notons qu'il n'est pas clair dans le programme que `GROUP BY` soit autorisé. Par conséquent, en tirant profit du fait qu'il y a cinq difficultés possibles de randonnée, on peut également proposer la requête suivante, qui utilise l'union de plusieurs requêtes. C'est évidemment beaucoup moins élégant.
>
> ```
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 1
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 2
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 3
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 4
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 5;
> ```

$\boxed{3}$ On peut proposer une approche consistant à récupérer l'information de la difficulté de la randonnée 42, afin d'utiliser celle-ci comme requête imbriquée dans une seconde requête ayant pour but d'identifier les bons randonneurs.

```
SELECT pnom
FROM Participant
WHERE diff_max < (SELECT diff FROM Rando WHERE rid = 42);
```

> Toutefois, on peut être tenté d'effectuer une jointure, qui semble moins naturelle car il n'y a aucun lien de jointure entre les deux tables. Par conséquent, et en l'absence de ce lien, cette jointure s'apparente au produit cartésien des deux tables. On retient alors les noms des randonneurs pour lesquels la difficulté maximale supportée est inférieure à celle de la randonnée 42.
>
> ```
> SELECT pnom
> FROM Participant JOIN Rando
> WHERE rid = 42 AND diff_max < diff;
> ```

> Il est possible toutefois de faire un lien de jointure qui soit directement une inégalité, solution très proche de la précédente.
>
> ```
> SELECT pnom
> FROM Participant JOIN Rando ON diff_max < diff
> WHERE rid = 42;
> ```

**4** On veut étudier tous les couples de randonnées ayant le même nom, mais pas le même identifiant, autrement dit des clefs primaires différentes. On est donc obligé de réaliser une autojointure, c'est-à-dire une jointure de la table `Rando` avec elle-même. Une fois cette jointure réalisée, et afin de distinguer les randonnées venant de chaque couple, il faut procéder à un renommage de celles-ci avec le mot-clef `AS`. Enfin, le sujet demande de réunir ces informations en supprimant les doublons, ce que l'on peut faire avec le mot-clef `DISTINCT`. Finalement, on peut proposer la requête suivante.

```
SELECT DISTINCT r1.rid
FROM Rando AS r1 JOIN Rando AS r2 ON r1.rnom = r2.rnom
WHERE r1.rid <> r2.rid;
```

> Cette question est particulièrement difficile, car il n'est pas clair que le mot-clef `DISTINCT` soit autorisé et la notion d'auto-jointure est sans doute la plus subtile de celles que l'on peut rencontrer en base de données dans le programme d'informatique de classes préparatoires. Bien comprendre cette question est toutefois très bénéfique pour le SQL en général et il est intéressant de passer le temps nécessaire à bien la saisir.

**5** On utilise pour cette question ce qui est présenté dans le sujet. On commence par ouvrir le fichier, puis on lit la première ligne afin de s'en débarrasser, car elle ne sert pas dans la suite. On récupère alors les lignes les unes après les autres, en prenant soin à chaque étape d'utiliser la méthode `split` afin d'extraire les quatre données utiles, et enfin en n'oubliant pas de changer de type de variable grâce à la fonction `float`, qui convertit une chaîne de caractères en flottant. On n'oublie pas de fermer le fichier.

```
def importe_rando(nom_fichier):
    # Ouverture de nom_fichier en lecture
    fichier = open(nom_fichier, "r")
    # On lit la première ligne, qui ne sert pas
    fichier.readline()
    # On récupère les lignes suivantes
    lignes = fichier.readlines()
    fichier.close()  # Fermeture de l'objet fichier
    coords = [ ]
    for l in lignes:  # On parcourt chaque ligne du fichier
        # On découpe la ligne par rapport à la virgule
        interm = l.split(",")
        lat, lon, alt, t = interm  # On récupère chacun des 4 termes
        # Puis on les stocke en les convertissant en flottants
        coords.append([float(lat), float(lon), float(alt), float(t)])
    return coords
```

> La fermeture de fichier peut s'effectuer dès que l'ensemble des informations désirées est constitué, ce qui est le cas après la fin du `readlines`. Cette fermeture aurait tout aussi bien pu s'effectuer juste avant le `return`.

# X/ENS Maths PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Guilmant (ENS Lyon) ; il a été relu par Sélim Cornet (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet d'analyse traite des notions d'intégrale et de dérivée fractionnaires. Ces concepts interviennent par exemple en physique pour décrire le comportement de certains systèmes dynamiques. Tout comme il existe des montages intégrateurs ou dérivateurs, il est possible de créer des systèmes qui se comportent comme des demi-dérivateurs. Plus généralement, on peut définir un opérateur pseudo-différentiel linéaire $\mathrm{J}^\alpha$ pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ généralisant les intégrations successives, mais aussi un opérateur $\mathrm{D}^\alpha$ généralisant les dérivations successives. Toutefois, des comportements gênants apparaissent, comme la non commutativité des opérateurs $\mathrm{D}^\alpha$ et $\mathrm{D}^\beta$ dans le cas général. Cela peut venir, par exemple, de l'impossibilité de permuter les intégrales évoquées dans les définitions de ces opérateurs pseudo-différentiels. Ces permutations diverses (entre séries et intégrales, entre dérivées et intégrales ou séries, etc.) sont omniprésentes dans le sujet. Leur manipulation est la principale compétence évaluée.

Le sujet comporte quatre parties. La première est un recueil de résultats préliminaires utiles dans les autres parties. On définit ensuite l'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire. Enfin, on applique ces opérateurs pour résoudre une équation différentielle faisant intervenir un opérateur différentiel fractionnaire.

- Le sujet commence par quelques résultats préliminaires. La fonction $\Gamma$ est introduite afin de remplacer les factorielles qui peuvent apparaître lorsque l'on intègre ou dérive successivement. On montre ensuite une version du théorème de Fubini qui permettra de permuter des intégrales. Enfin, on définit et étudie brièvement le produit de convolution et la transformée de Laplace.
- Dans la partie A, on étudie l'intégration fractionnaire. On introduit les fonctions qui joueront le rôle des primitives et dérivées fractionnaires de l'identité. On observe que les propriétés de l'opérateur d'intégration sont bien préservées dans ce cadre plus général.
- La partie B s'intéresse à la dérivation fractionnaire. Elle en propose deux définitions, qui ne sont pas équivalentes. Il faut ensuite montrer comment passer d'une définition à l'autre.
- La partie C applique ce qui a été vu jusqu'alors. On va en particulier résoudre une équation différentielle fractionnaire à l'aide de la transformée de Laplace.

Ce sujet nécessite de l'aisance dans les calculs algébriques et une bonne connaissance de tous les théorèmes de permutation au programme, qui suffisent pour répondre à beaucoup de questions. Ce sujet permet de travailler en profondeur ou de réviser ces théorèmes.

# Indications

## Préliminaires

1-a Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour cela, la comparer dans les deux cas à une intégrale de Riemann.

1-b Intégrer par parties sur l'intégrale définissant $\Gamma(x+1)$.

2-a-i Utiliser le théorème de convergence dominée.

2-a-ii Montrer que pour $t \in [\,0\,;a\,]$ et $\eta \in [\,-\eta\,;a-t\,]$,

$$|g(t+\eta)-g(\eta)| \leqslant \left|\int_0^t (f(t+\eta,u)-f(t,u))\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_t^{t+\eta} f(t+\eta,u)\,\mathrm{d}u\right|$$

et majorer $|f(t+\eta,u)|$ indépendamment de $t$, $\eta$ et $u$.

2-b-ii Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre puis la question 2-a-ii pour montrer que les fonctions

$$u \longmapsto \int_0^\beta f(t,u)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad u \longmapsto \int_0^u f(t,u)\,\mathrm{d}t$$

sont continues. Conclure à l'aide du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre.

2-b-iii Utiliser la règle de la chaîne.

2-c À l'aide des questions 2-a-iii et 2-b-iii, montrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction. Conclure en observant que $\mathrm{F}(0)=\mathrm{G}(0)$.

3-a Utiliser la question 2-a-ii sur la fonction

$$h_a\colon \begin{cases} [\,0\,;a\,]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \;(x,t) \;\;\longmapsto f(x-t)g(t) \end{cases}$$

pour $a$ un réel.

3-c Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$(f*g)*h(x) = \int_0^x \left(\int_t^x f(x-v)g(v-t)h(t)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t$$

puis appliquer la question 2-c.

4-b Montrer qu'il existe des réels M et $r$ qui conviennent à la fois à $f$ et à $f'$. Faire ensuite une intégration par parties sur $\mathcal{L}(f')(s)$ pour $s$ suffisamment grand.

4-c Considérer des réels M et $r$ qui conviennent à la fois à $f$ et à $g$. Remarquer que pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^x \geqslant x$.

5-b Écrire $f(x)^2 = (f(x)-p_\varepsilon(x))f(x) + p_\varepsilon(x)f(x)$.

## Partie A

6 Définir une propriété $\mathscr{P}(n)$ et la montrer par récurrence double. Pour ce faire, initialiser en 1 et 2 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+2)$. On pourra utiliser l'identité $(\mathrm{E}_2)$ et intégrer par parties.

7-b Utiliser l'identité $(\mathrm{E}_1)$.

7-c Utiliser la question 4-a pour obtenir la bonne définition de $\mathcal{L}(\Phi_a)(s)$ pour $s$ suffisamment grand. Utiliser alors le changement de variable linéaire $u = st$.

8-a Séparer les cas $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Utiliser les questions 3-c et 7-b.

8-d Faire usage des résultats des questions 8-b et 5-c.

## Partie B

9 Effectuer un raisonnement par récurrence sur $n$. Pour l'hérédité, appliquer l'hypothèse de récurrence à $f'$.

10-b Pour rappel, $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante à 1. Effectuer le changement de variable $v = t - u$ pour ensuite appliquer les questions 8-c et 7-a.

10-d Montrer d'abord que $\mathrm{D}^\alpha(f) = 0$ si et seulement si

$$\mathrm{J}^{m-\alpha}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{D}^k(\mathrm{J}^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{k+1}$$

Ne pas oublier ensuite de séparer les cas $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$. Conclure avec la question 8-d.

11-c Soient $\gamma \geqslant 0$ et $\lceil\gamma\rceil$ l'entier tel que $\lceil\gamma\rceil - 1 < \gamma \leqslant \lceil\gamma\rceil$. Montrer, à l'aide d'un théorème de permutation série-intégrale que

$$\mathrm{J}^{\lceil\gamma\rceil-\gamma}(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \quad \text{où} \quad g_k = \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{k\,!} \Phi_{\lceil\gamma\rceil-\gamma+\lambda+k+1}$$

Montrer ensuite que l'on peut dériver $\lceil\gamma\rceil$ fois sous le signe somme. Pour cela, on peut utiliser que, pour tout entier $j$, les séries entières $\sum a_k t^k$ et $\sum a_k k^j t^k$ ont le même rayon de convergence. Appliquer ensuite ce résultat à $\gamma = \alpha + \beta$ et $f$, puis à $\gamma = \beta$ et $f$ puis enfin à $\gamma = \alpha$ et $\mathrm{D}^\beta(f)$.

12-a Utiliser le fait que $\mathrm{J}^\alpha \circ \mathrm{D}_*^\alpha(f) = 0$, ainsi que les questions 8-a et 9.

12-b Montrer que $\mathrm{J} \circ \mathrm{J}^\alpha \circ \mathrm{D}(f) = \mathrm{J} \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{J}^\alpha(f) - f(0)\mathrm{J}^\alpha(\Phi_1)$. Appliquer ensuite D à chacun des membres de cette égalité et conclure en appliquant la question 10-c pour obtenir une autre forme du terme $\mathrm{D} \circ \mathrm{J}^\alpha(\Phi_1)$.

12-c Montrer la propriété $\mathscr{P}(k)$ suivante par récurrence pour tout $k \in [\![ 1\,;m ]\!]$.

$$\mathscr{P}(k) : \mathrm{D}^k \circ \mathrm{J}^{m-\alpha}(f) = \mathrm{J}^{m-\alpha} \circ \mathrm{D}^k(f) + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\Phi_{m-k-\alpha+1+j}$$

## Partie C

13-b Utiliser les questions 4-b et 8-b.

14-a Reconnaître des séries entières usuelles.

14-b Utiliser la règle de d'Alembert et le théorème de convergence dominée.

14-c Obtenir que $\mathcal{L}(e_\alpha)(s)$ est bien défini pour $s > 1$ grâce au théorème de permutation série-intégrale. Montrer alors, grâce à la question 7-c, que

$$\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{s^{1+\alpha k}}$$

14-d Utiliser les questions 8-b et 14-c.

15 Calculer $\mathrm{J}^\alpha \circ \mathrm{D}_*^\alpha(u)$ à l'aide de la question 8-a, puis conclure avec la question 9.

16 Appliquer la transformée de Laplace à l'équation obtenue en question 15. Obtenir l'équation sur $\mathcal{L}(u)(s)$ à l'aide des questions 7-c et 8-b. Utiliser la question 5 pour conclure.

## Préliminaires

**1-a** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $g_x$ sur $\mathbb{R}$ par

$$g_x(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a, d'après le théorème des croissances comparées, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et $t \mapsto 1/t^2$ est une fonction intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$$

Par équivalence avec une intégrale de Riemann en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x - 1 > -1$, c'est-à-dire, si et seulement si $x > 0$. Ainsi, $g_x$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ pour tout $x > 0$, donc

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

**1-b** Soit $x > 0$. Calculons $\Gamma(x+1)$ à l'aide d'une intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathscr{C}^1$. De plus,

$$\lim_{t\to 0^+} -\mathrm{e}^{-t}t^x = \lim_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t}t^x = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t}t^x - \lim_{t\to 0^+} -\mathrm{e}^{-t}t^x + x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Soit la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathscr{P}(n): \quad \Gamma(n) = (n-1)\,!$$

Démontrons-la par récurrence.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie : en effet, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^0 = 1 = 0\,!$$

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$ : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par l'hypothèse de récurrence et la propriété ci-dessus, on obtient

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\,! = n\,!$$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(n) = (n-1)\,!}$$

# X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet présente le problème de l'allocation dynamique de mémoire, qui est fondamental dans le fonctionnement des systèmes d'exploitation et de la plupart des langages de programmation. C'est un important domaine de recherche et d'ingénierie : des algorithmes utilisant des idées semblables à celles présentées ici sont utilisés en permanence par les OS modernes et par les applications. Le sujet est de difficulté croissante et à aborder dans l'ordre puisque chaque partie repose sur la précédente.

- En guise d'introduction, la partie I pose trois questions faciles pour réaliser une première implémentation naïve.
- La partie II introduit la notion d'en-têtes à chaque portion de mémoire. Ces métadonnées permettent de recycler la mémoire qui n'est plus utilisée.
- Dans la partie III, les métadonnées sont complexifiées et dupliquées afin de permettre la fusion de portions libres consécutives. L'une des questions d'implémentation de cette partie est particulièrement difficile.
- Enfin, la partie IV introduit une amélioration du système précédent qui consiste à maintenir une chaîne des portions libres permettant de parcourir rapidement ces dernières.

Le sujet ne comporte que 15 questions ; c'est peu, mais les enjeux sont autant la rapidité que la justesse. En effet, l'implémentation des fonctions `reserver` et `liberer` des deux dernières parties est complexe, et propice à de nombreuses erreurs de logique ou de décalage d'indices, surtout sur papier. Néanmoins, le sujet est très guidé et bien posé. Plusieurs pages ne comportent pas de question mais sont à lire attentivement puisqu'elles présentent les principes des algorithmes étudiés ou les fonctions à utiliser pour les implémentations. On pourra d'ailleurs noter que cette pratique d'encapsulation du code derrière des interfaces que l'on peut utiliser sans connaître leur fonctionnement interne est un pilier de la programmation orientée objet, un paradigme de programmation utilisé par exemple dans les langages Python, Java, C++, etc. C'est un très bon sujet d'entraînement, que l'on peut aborder dès la première année pour tester sa capacité à écrire du code sans faute.

# Indications

## Partie I

3 Ne pas oublier de gérer le cas où la mémoire est trop pleine pour effectuer l'allocation.

## Partie II

5 Pour parcourir la mémoire, les blocs étant de taille fixe, il est approprié d'utiliser une boucle `for` avec un incrément adapté. Utiliser la fonction `initialiser` de la question 1. Prendre soin de bien gérer les cas particuliers (taille demandée supérieure à la taille d'un bloc ou allocation à la fin impossible par manque de place).

## Partie III

7 On pourra imaginer la représentation binaire de l'entier dans l'en-tête et le pied de page.

8 Utiliser, entre autres, la fonction `marque_reservee` fournie par l'énoncé.

9 Commencer par un parcours des portions successives pour en chercher une libre et de taille suffisante. Le cas échéant, on effectue l'allocation, on crée éventuellement une section libre avec le reliquat et on retourne immédiatement. Si on arrive à l'épilogue sans avoir trouvé de portion adaptée, on alloue sur place en décalant l'épilogue après avoir vérifié que la place disponible est suffisante.

10 Si la portion suivante est libre, on peut augmenter la taille de la portion libérée. Si la portion précédente est libre, on en augmente la taille et on déplace également le pointeur qui en marque le début.

## Partie IV

11 Commencer par le cas où la chaîne est initialement vide. Faire un schéma pour voir quelles relations (successeur ou prédécesseur) sont réécrites, et où. Faire de même pour le cas général.

12 Observer que pour supprimer une portion de la chaîne, il suffit de raccorder son prédécesseur et son successeur. Vérifier les cas limites lorsque la portion est en entrée ou à la fin de la chaîne.

13 Ne pas oublier que la variable globale `PROLOGUE` a été modifiée.

14 Les lignes de l'implémentation précédente à modifier sont celles qui effectuent le parcours des portions à la recherche d'une portion recyclable. Il faut également ajouter des appels à `supprime_dans_chaine` et `ajoute_en_entree_de_chaine` pour maintenir la chaîne à jour.

15 Ajouter trois lignes à la fonction `liberer` de la question 10 : deux appels à `supprime_dans_chaine` et un à `ajoute_en_entree_de_chaine`.

# I. Implémentation naïve

**1** La fonction `initialiser` remplit avec le caractère `c` les cases de mémoire situées entre les indices `p` inclus et `p+n` exclu.

```
def initialiser(p, n, c):
    for i in range(n):
        mem[p+i] = c
```

> La fonction `initialiser` n'est pas une des cinq faisant partie de l'interface du service. C'est donc une fonction auxiliaire, à usage interne (appelée par `reserver`). Il convient ici, comme d'habitude, de lire les questions un peu en avance afin de ne pas déjà implémenter dans `initialiser` ce qui doit l'être dans `reserver`.

**2** La fonction `demarrage` doit placer la mémoire dans un état prêt à recevoir des demandes d'allocation. Initialement, la mémoire est vide et la seule case qui sera lue avant d'être écrite est `mem[0]`. On doit donc s'assurer que sa valeur est correcte pour la première utilisation de la mémoire. Cette case indiquant le début de la prochaine portion libre, sa valeur initiale doit être `1`.

```
def demarrage():
    mem[0] = 1
```

**3** Dans la fonction `reserver`, on commence par s'assurer que la mémoire disponible est suffisante pour effectuer l'allocation. Si ce n'est pas le cas, on retourne directement `None`, comme demandé. Si tout va bien, on initialise la portion demandée à l'aide de la fonction écrite à la question 1 et on change la valeur de la première case, sans oublier de retourner l'indice de la portion allouée.

```
def reserver(n, c):
    p = mem[0]
    if p + n > TAILLE_MEM:
        return None
    initialiser(p, n, c)
    mem[0] += n
    return p
```

> Pour vérifier si le test sur la mémoire disponible doit être implémenté à l'aide d'une inégalité large ou stricte, on peut compter les cases du schéma donné dans l'énoncé. Pour `TAILLE_MEM = 30` et `mem[0] = 19`, on peut allouer au maximum 11 cases, une douzième case serait de trop. Comme $19+11=30$ et $19+12=31$, on doit utiliser une inégalité stricte à la troisième ligne.
>
> On aurait pu exploiter le fait que les fonctions Python retournent implicitement `None` lorsque l'exécution arrive à leur fin pour écrire :
>
> ```
> def reserver(n, c):
>     p = mem[0]
>     if p + n <= TAILLE_MEM:
>         initialiser(p, n, c)
>         mem[0] += n
>         return p
> ```

> C'est une bonne pratique de signaler les erreurs de manière explicite et le plus tôt possible, ce qui permet également de réduire le niveau d'indentation moyen du code et de le rendre plus compréhensible.

Pour calculer la complexité de la fonction, il faut compter le nombre d'opérations élémentaires effectuées par celle-ci. La fonction `reserver` est sans boucle ni récursion, et la seule fonction qu'elle appelle est `initialiser`, qui effectue un nombre d'opérations proportionnel à `n`. **Par conséquent, la complexité de la fonction est en $\mathbf{O}(n)$ et ne dépend pas de la taille totale de la mémoire.**

## II. Réservations de blocs de tailles fixes

$\boxed{4}$ Pour l'initialisation de la mémoire, il s'agit de s'assurer, comme à la question 2, que la première case pointe au bon endroit. Il est inutile d'initialiser les en-têtes, puisque l'allocation de mémoire à partir de `mem[0]` réserve des blocs neufs, jamais encore réservés, et donc ne lit pas leurs en-têtes. Puisque `mem[0]` ne pointe pas vers l'en-tête d'un bloc, mais vers le début d'une portion de données, sa valeur initiale est ici 2 et non plus 1 comme à la question 2.

```
def demarrage():
    ecrire_prochain(2)
```

$\boxed{5}$ On peut commencer par vérifier que la taille de mémoire demandée ne dépasse pas d'un bloc. Puis, s'il existe un bloc libre à recycler, on doit l'utiliser. On en recherche donc un, en itérant sur les emplacements des portions, de la première, incluse, à celle désignée par `mem[0]`, exclue, au moyen de la fonction `range` dont le troisième argument indique l'incrément. Si la recherche échoue, après avoir vérifié que la mémoire disponible est suffisante, on effectue l'allocation d'un bloc sur la portion pointée par `mem[0]` et on met à jour la prochaine portion libre si besoin.

```
def reserver(n, c):
    if n + 1 > TAILLE_BLOC:
        return None
    # Recherche d'un bloc libre à recycler
    for p in range(2, lire_prochain(), TAILLE_BLOC):
        if est_libre(p):
            marque_reservee(p)
            initialiser(p, n, c)
            return p
    # Pas de bloc libre trouvé : allocation à la fin si possible
    p = lire_prochain()
    if p + TAILLE_BLOC - 1 > TAILLE_MEM:
        return None
    ecrire_prochain(p + TAILLE_BLOC)
    marque_reservee(p)
    initialiser(p, n, c)
    return p
```

> Ici encore, ne pas hésiter à compter les cases à la main et à jouer avec les dimensions pour vérifier que les tests sont corrects.