

PSI
Physique · Modélisation · Chimie
2020

Sous la coordination de

Vincent FREULON
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Jacques DING
École Polytechnique

Julien DUMONT
professeur en CPGE

Émilie FRÉMONT
professeur en CPGE

Vincent FREULON
professeur en CPGE

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Jérôme LAMBERT
enseignant-chercheur à l'université

Guillaume MAIMBOURG
professeur en CPGE

Tom MOREL
professeur en CPGE

Sommaire thématique de physique

2015 – 2020

e3a MP Physique et Chimie																				
e3a PC Physique et Chimie																				
e3a PSI Physique et Chimie	•	•			•		•					••								
CCINP MP Physique			•	••	••		•••				•••	•••	•••	••						••
CCINP MP Physique et Chimie	••	••			•		••				•	••								•
CCINP PC Physique	••	•		•	••		•••	••	•		••	••	••	••						
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie	•	••		•			••											•	•••	
CCINP PSI Physique et Chimie	••	••		•	•••	••	••	••	•		••	••	•							
CCINP PSI Modélisation numérique	•	••			••	••	•	••			••									••
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	••	•	•	••		•••				••								••	
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		••	•		••				••	••	••						•	
Centrale PC Physique 1	•			••	•		•	••	•		••	••	••	••					••	
Centrale PC Physique 2	••	•	•	••	•		••	••	••	••	••			••	••				••	
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	••		••	••	••	••	••			••									
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•••	••			••	•	••	••	••	•	••	•								
Mines MP Physique 1	••	•			••		••			••	••	••	•	•					•	
Mines MP Physique 2	••	•	••	••	•		••				••	••	•	•					••	
Mines PC Physique 1	••	•			••		••	••	••	••	••	••	•							
Mines PC Physique 2	••	•		•			••	••	••	••	••	•	••	••					••	
Mines PSI Physique 1	•	•			••		••	••	••	••	••	••	•							
Mines PSI Physique 2	•				••	••	••	••	••	••	••	••								
X/ENS MP Physique	••		•				•••			•	••	••								
X/ENS MP Physique et SI	•	•			••		•••			•	•	••	••	•					•	
X/ENS PC Physique A	••				•		•••	•		•	••	••	••	••					••	
X/ENS PC Physique B				••			••	••	••	••	••								•	
X/ENS PSI Physique	•	•		••	••	•	••			••	•								•	
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•	•		•	••	••	••	••	••		•									••
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnéto-statique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique	Informatique pour tous							

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUN INP			
Physique et Chimie	Machine à courant continu et Hacheur. Application au funiculaire. Chlore et eau de javel. <i>électromagnétisme, mélectrocinétique, mécanique, diffusion thermique, conversion de puissance, solutions aqueuses, oxydoréduction, diagrammes E-pH</i>	11	25
Modélisation et Ingénierie numérique	Modélisation d'un circuit de refroidissement à eau. <i>électronique, thermodynamique, mécanique des fluides, mécanique des solides</i>	44	64
CENTRALE-SUPÉLEC			
Physique et Chimie 1	Stockage d'énergie par pompage thermique (procédé SEPT). <i>thermodynamique, diffusion thermique, cristallographie</i>	80	90
Physique et Chimie 2	Étude simplifiée du vol d'un Airbus A320. <i>mécanique des fluides, thermodynamique, solutions aqueuses, oxydoréduction, cinétique chimique, diagrammes E-pH, mélanges binaires</i>	107	116

MINES-PONTS

Physique 1	Au temps des Mayas. <i>ondes, électronique, thermodynamique, optique</i>	138	149
Physique 2	La lévitation acoustique. <i>ondes acoustiques, mécanique, conversion de puissance, électrocinétique</i>	161	168
Chimie	Le gadolinium. <i>cristallographie, solutions aqueuses, oxydoréduction, thermodynamique, mélanges binaires</i>	188	197

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Mesures de précision. Application à la métrologie. <i>mécanique, électromagnétisme, traitement du signal</i>	208	218
Physique et Modélisation	Étude d'un hydrofoil. <i>mécanique des fluides, mécanique du solide, informatique, réduction des endomorphismes, diffusion thermique, électromagnétisme</i>	232	258

FORMULAIRES

Constantes chimiques	280
Constantes physiques	283
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

SESSION 2020



PSI2PC

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**PHYSIQUE - CHIMIE****Lundi 4 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites**Le sujet est composé de six parties.**

Machine à courant continu et Hacheur Application au funiculaire Chlore et eau de javel

Partie I - Conducteur ohmique

Conducteur ohmique cylindrique en régime stationnaire

On considère (**figure 1**) un conducteur ohmique cylindrique, de conductivité électrique γ , de section S et de longueur h parcouru par un courant électrique constant et uniformément réparti de vecteur densité volumique de courant : $\vec{j} = j\vec{e}_y$.

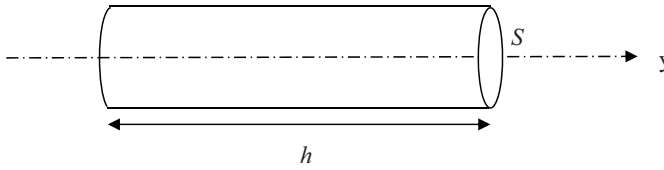


Figure 1 - Conducteur cylindrique

- Q1.** Rappeler la formulation locale de la loi d'Ohm en faisant intervenir d'abord le champ électrique \vec{E} puis le potentiel électrique V . Donner un ordre de grandeur de la conductivité électrique du cuivre à température ambiante.
- Q2.** Proposer simplement une loi analogue appartenant à un autre domaine de la physique et préciser les unités de toutes les grandeurs qui interviennent.
- Q3.** Donner, en fonction de γ , j et des caractéristiques géométriques du conducteur, les expressions du courant électrique I traversant ce conducteur et de la différence de potentiel U aux bornes de ce conducteur.
- Q4.** En déduire en fonction de γ et des caractéristiques géométriques, la résistance électrique R_Ω de ce conducteur.

Conducteur ohmique parallélépipédique, semi-infini, en régime sinusoïdal et effet de peau

On considère (**figure 2**) un conducteur ohmique, parallélépipédique, semi-infini suivant \vec{e}_x , de hauteur h suivant \vec{e}_y et d'épaisseur p suivant \vec{e}_z . On se place en régime quasi-permanent dans lequel la densité de courant dépend de x et du temps : $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e}_y$. On admet alors que $j(x,t)$

vérifie l'équation : $D \frac{\partial^2 \vec{j}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \vec{j}(x,t)}{\partial t}$.

- Q5.** Comment nomme-t-on ce type d'équation ? Préciser l'unité de D .

On admettra dans la suite de cette **partie** que : $\vec{j}(x,t) = j_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{e}_y$, où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.
 μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ω la pulsation imposée par le courant.

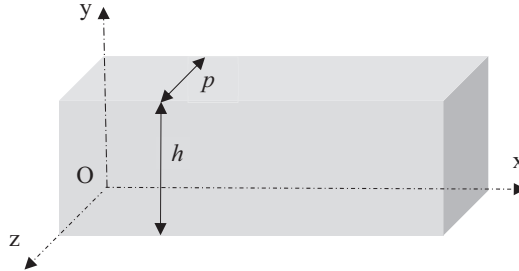


Figure 2 - Conducteur parallélépipédique semi-infini

Q6. Définir, à l'aide d'une intégrale double, l'expression de l'intensité instantanée $i(t)$ du courant transporté par ce conducteur.

On donne une primitive : $F(u) = \frac{-\delta}{\sqrt{2}} e^{-u/\delta} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{u}{\delta})$ de la fonction $f(u) = e^{-u/\delta} \cos(\omega t - u/\delta)$.

En déduire l'expression de la valeur efficace I_{eff} de ce courant en fonction de p, j_0 et δ .

Q7. Rappeler l'expression de la puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique. L'intégration de cette grandeur sur le volume du conducteur, non demandée ici, permet de déterminer l'expression de la puissance moyenne dissipée par effet

Joule dans ce conducteur : $P_{Joule} = \frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma}$.

Exprimer la résistance du conducteur en fonction de h, p, γ et δ et interpréter la dénomination « épaisseur de peau » associée à la grandeur δ .

Dans les questions suivantes, on considère le conducteur parcouru par un courant sinusoïdal de valeur efficace I_{eff} fixée.

Q8. Que peut-on dire de P_{Joule} dans le cas d'une conductivité infinie ? D'une conductivité nulle ?

Q9. Comparer P_{Joule} à haute et à basse fréquences. La résistance du conducteur dépend de la fréquence f suivant la loi : $R(f) = R(f_0) \times \left(\frac{f}{f_0}\right)^\alpha$, où f_0 est une fréquence de référence quelconque. Déterminer la valeur de l'exposant α .

CCINP Physique et Chimie PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Émilie Frémont (professeur en CPGE), Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur la machine à courant continu et sur la chimie de l'eau de Javel. Ses six parties sont relativement indépendantes.

- Dans la partie I, on étudie un conducteur ohmique en régime stationnaire puis en régime sinusoïdal. On calcule tout d'abord la résistance électrique en régime continu. Ensuite, à partir de l'étude de l'effet de peau, on détermine l'équivalent de cette résistance en régime sinusoïdal. Cette partie s'achève par une étude énergétique de l'effet de peau. Elle repose essentiellement sur des notions d'électromagnétisme dans les milieux ohmiques.
- La deuxième partie, assez courte, s'intéresse aux caractéristiques électriques intrinsèques d'une machine à courant continu (M.C.C.).
- La partie III est consacrée à la commande d'une M.C.C. Après avoir envisagé brièvement trois dispositifs possibles de contrôle, on étudie finalement le fonctionnement d'un hacheur série. Cette partie, plus compliquée, fait appel à de nombreux raisonnements sur le hacheur et les amplificateurs linéaires intégrés.
- La quatrième partie concerne la dissipation thermique dans les transistors, composants fondamentaux des hacheurs. Après avoir établi une analogie entre conduction thermique et électrique, on s'intéresse à une ailette de refroidissement en n'utilisant que des notions de thermodynamique de seconde année.
- Le principe de fonctionnement mécanique d'un funiculaire est étudié dans la partie V. Les questions sont ouvertes et nécessitent une bonne compréhension du système ainsi qu'un raisonnement rigoureux.
- La partie VI est consacrée à la chimie. Elle s'intéresse au chlore et à l'eau de Javel. Les deux premières questions abordent la classification périodique et la configuration électronique du chlore. Puis on détermine la solubilité du chlorure de sodium dans l'eau à l'aide de résultats expérimentaux. La dernière sous-partie, la plus longue, traite du dosage classique de l'eau de Javel par réaction avec les ions iodure, acidification, puis titrage du diiode par les ions thiosulfate. Cette partie est très proche du cours et ne présente pas de difficulté particulière. L'accent est mis sur la chimie expérimentale.

Ce sujet de longueur raisonnable est représentatif des épreuves proposées à ce concours. Il aborde de nombreux domaines du programme de première comme de seconde année. Notons toutefois la présence de quelques questions subtiles, qui requièrent du recul sur les enjeux physiques du problème.

INDICATIONS

Partie I

9 La valeur efficace I_{eff} fixe la valeur de j_0 .

Partie II

- 10 L'inducteur comporte un grand nombre de spires.
 12 Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans l'induit, puis déterminer la constante de temps et la valeur asymptotique de l'intensité.

Partie III

15 La valeur moyenne V_{moy} de $U_1(t)$ est définie par

$$V_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_1(t) dt$$

- 17 En l'absence de rétroaction sur l'entrée inverseuse, l'ALI fonctionne en régime saturé.
 20 En régime saturé, lorsque $V_+ > V_-$, $V_B = +V_{\text{sat}}$. Déterminer la condition de basculement en fonction de la valeur de V_A .
 21 La masse impose que les potentiels, à gauche et à droite du potentiomètre, sont respectivement $-V_m/2$ et $V_m/2$.
 22 La fréquence s'obtient à partir de la condition de basculement vue à la question 20. Le rapport cyclique se détermine à partir de la condition $\beta V_{\text{sat}} = V_A(t)$.

Partie IV

26 Les équations différentielles peuvent être interprétées comme des lois des nœuds. Utiliser ensuite la notion de résistance thermique. La température extérieure T_{ext} joue le rôle de référence de potentiel électrique.

Partie V

31 La puissance de 4 kW donnée correspond à la puissance fournie au dispositif pour compenser les frottements. On peut alors les mettre de côté pour la modélisation et les réintroduire à la fin.

Partie VI

- 36 Déterminer l'équation de la courbe d'étalonnage. Ne pas oublier le facteur 1 000 de la dilution.
 38 Utiliser le diagramme E-pH pour repérer les espèces de domaines disjoints et pour trouver les produits formés.
 39 Procéder comme à la question précédente.
 40 Quelle espèce du chlore est produite par le même phénomène que celui de la question 39 ?
 41 Le couple rédox du thiosulfate est $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$.
 42 Considérer toutes les réactions comme quantitatives et établir les relations entre les quantités de matière. Ne pas oublier la dilution initiale.

MACHINE À COURANT CONTINU ET HACHEUR

APPLICATION AU FUNICULAIRE

CHLORE ET EAU DE JAVEL

I. CONDUCTEUR OHMIQUE

1 Notons γ la conductivité électrique du milieu. La loi d'Ohm locale s'écrit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Pour le cuivre,

$$\gamma_{\text{Cu}} = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$$

2 On retrouve une loi analogue en diffusion thermique avec la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

avec \vec{j}_Q la densité de flux thermique en $\mathbf{W.m}^{-2}$, T la température en \mathbf{K} et λ la conductivité thermique en $\mathbf{W.K}^{-1.m}^{-1}$.

3 Par définition,

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

La densité de courant volumique est uniforme donc

$$I = jS$$

Le vecteur \vec{j} est orienté selon \vec{e}_y donc $\vec{E} = E \vec{e}_y$ (voir schéma). Par définition,

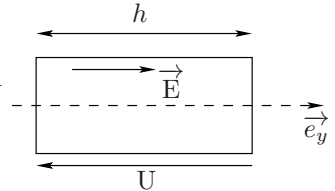
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E dy$$

Intégrons entre $y = 0$ et h :

$$V(h) - V(0) = -Eh$$

Posons $U = V(0) - V(h)$, alors $U = Eh$. D'après la loi d'Ohm locale,

$$U = \frac{jh}{\gamma}$$



4 La résistance électrique est définie par $R_\Omega = U/I$. Par conséquent,

$$R_\Omega = \frac{h}{\gamma S}$$

5 On a une **équation de diffusion**. Le coefficient de diffusion D est en $\mathbf{m}^2.\mathbf{s}^{-1}$.

6 Le vecteur surface de la surface élémentaire traversée par \vec{j} est $d\vec{S} = dS \vec{e}_y$. Reprenons la définition de l'intensité donnée à la question 3 :

$$i(t) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^{+\infty} \int_0^p j(x, t) dx dz$$

Il vient

$$i(t) = j_0 p \int_0^{+\infty} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) dx$$

La primitive est fournie. Finalement,

$$i(t) = -\frac{j_0 p \delta}{\sqrt{2}} \left[e^{-x/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{\delta} \right) \right]_0^{+\infty}$$

d'où

$$i(t) = \frac{j_0 p \delta}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

La valeur efficace I_{eff} est définie par $\sqrt{\langle i^2(t) \rangle}$ où $\langle \rangle$ est la valeur moyenne temporelle. Avec $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$, on arrive à

$$\langle i^2(t) \rangle = \left(\frac{j_0 p \delta}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$I_{\text{eff}} = \frac{j_0 p \delta}{2}$$

7 La puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Comme $P_{\text{Joule}} = R I_{\text{eff}}^2$

$$R = \frac{P_{\text{Joule}}}{I_{\text{eff}}^2} = \frac{h}{\gamma p \delta}$$

En régime stationnaire, la résistance est $R_\Omega = h/(\gamma S)$. Par identification avec la formule précédente, $S = p \delta$ où p est l'épaisseur du matériau conducteur dans la direction (Oz) . Tout se passe comme si le matériau avait une longueur δ selon (Ox) et que la densité de courant était non nulle uniquement sur cette longueur, d'où l'appellation « **épaisseur de peau** ».

8 Dans le cas d'une conductivité infinie, la **puissance dissipée par effet Joule est nulle**.

Pour une conductivité infinie, l'effet de peau impose un champ électrique nul dans le matériau car δ tend vers 0. Le champ électrique est totalement réfléchi par le conducteur et il n'y a donc pas d'effet Joule dans le matériau. Il s'agit du modèle du conducteur parfait.

De même dans le cas d'une conductivité nulle, la loi d'Ohm locale impose $j = 0$, c'est-à-dire $I_{\text{eff}} = 0$. **La puissance par effet Joule est également nulle**.

9 D'après l'énoncé, $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$. En pratique, la densité de courant j_0 est fixée par I_{eff} . Puisque $j_0 \propto I_{\text{eff}}/\delta$,

$$P_{\text{Joule}} \propto \frac{1}{\delta} \propto \sqrt{\omega}$$

À haute fréquence (respectivement basse fréquence), la puissance par effet Joule tend vers l'infini (respectivement vers zéro).

Reprenons l'expression de R obtenue à la question 7 et celle de δ fournie :

$$R = \frac{h}{\gamma p \delta} = \frac{h}{\gamma p} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

d'où

$$R = \frac{h}{p} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\gamma}} \sqrt{\omega} = \frac{h}{p} \sqrt{\frac{\pi \mu_0}{\gamma}} \sqrt{f}$$

CCINP Modélisation et Ingénierie numérique

PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jacques Ding (École Polytechnique) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Ce sujet propose de modéliser les différentes parties d'un circuit de refroidissement à eau utilisé pour les microprocesseurs d'ordinateurs portables. Les trois parties qui le composent sont indépendantes, ne comportent aucune question de programmation et ne mobilisent presque aucune connaissance en sciences de l'ingénieur.

- Dans la première partie, on s'intéresse à l'étude électronique d'une porte logique constituée de transistors. L'objectif est d'estimer la puissance thermique dissipée par la porte. Cela motive l'intérêt d'un circuit de refroidissement. Les questions de cette partie évaluent les compétences en conversion de puissance, ainsi que des connaissances générales sur les circuits électriques.
- La deuxième partie est consacrée aux transferts thermiques entre le processeur et un radiateur. Dans un premier temps, on analyse l'impact de l'ajout d'une pâte thermique introduite entre le processeur et le radiateur. Dans un second temps, c'est un circuit de refroidissement à eau qui est introduit entre le processeur et le radiateur. Quelques caractéristiques du circuit de refroidissement sont analysées. Dans un troisième temps, des méthodes numériques sont mises en œuvre pour résoudre de manière approchée l'équation de la diffusion thermique dans le radiateur. La thermodynamique des deux années est sollicitée.
- Dans la troisième partie, on modélise la pompe qui entraîne l'eau du circuit de refroidissement. C'est l'occasion de vérifier les connaissances en mécanique des fluides et en cinématique.

Ce sujet de longueur raisonnable est proche du cours de physique de PSI. Il traite de manière assez ciblée certains chapitres (bilans en thermodynamique, électronique de puissance) et permet de consolider la compréhension du cours.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Le fonctionnement d'une porte inverseuse est le suivant : pour une entrée nulle, la sortie est V_{DD} et pour une entrée valant V_{DD} , la sortie est 0.
- 4 Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de fuite de courant vers la sortie de la porte, établir une relation simple entre I_{DSn} et I_{DSp} . Pour déterminer la tension V_{DS} d'un transistor connaissant I_{DS} , on peut se référer à la figure 5.
- 8 L'alimentation fournit au circuit l'intensité $i(t)$ et la tension V_{DD} . Intégrer la formule de la puissance sur la durée de commutation.
- 12 Utiliser la formule établie à la question précédente pour en déduire la dépendance de la puissance moyenne avec la tension V_{DD} .
- 14 Appliquer le premier principe de la thermodynamique au microprocesseur.

Partie II

- 15 Calculer le côté du carré utile à l'aide de la figure 10 et comparer à l'épaisseur de la couche d'air.
- 16 S'inspirer de la démonstration de l'équation de la diffusion thermique du cours.
- 18 Remarquer que le volume de la pâte thermique est conservé lors de son étalement. Modéliser la forme que prend la pâte étalée par un cylindre dont on cherche l'épaisseur.
- 23 Faire une démonstration analogue au premier principe industriel.

Partie III

- 32 Justifier que la dérivée partielle par rapport au temps dans l'expression du moment dynamique est nulle. Montrer ensuite que le terme intégral sur la surface latérale est nul aussi. Calculer enfin les deux intégrales sur S_1 et S_2 avec les notations de l'énoncé.
- 35 Appliquer le théorème du moment dynamique au système composé du rotor et du fluide contenu dedans.
- 36 Raisonner géométriquement sur le schéma de droite de la figure 22.

MODÉLISATION D'UN CIRCUIT DE REFROIDISSEMENT À EAU

I. ORIGINE DE LA PUISSANCE THERMIQUE PRODUITE

1 Puisque $V_{GS} = V_{in} = 0 < V_{tn}$, le fonctionnement du transistor NMOS, donné dans la table 1, indique que l'intensité I_{DS} est nulle. D'après la loi d'Ohm appliquée à la résistance de la figure 6,

$$0 = R I_{DS} = V_{DD} - V_{out}$$

d'où

$$V_{out} = V_{DD}$$

2 Rappelons la fonction d'une porte logique :

- pour une entrée dans l'état bas (ici $V_{in} = 0$), la sortie est dans l'état haut, soit $V_{out} = V_{DD}$ en cohérence avec la définition de l'énoncé ;
- pour une entrée dans l'état haut ($V_{in} = V_{DD}$), la sortie est dans l'état bas ($V_{out} = 0$).

Lorsque l'entrée V_{in} est nulle, toutes les valeurs de R permettent d'avoir la sortie V_{out} à 5 V (c'est-à-dire à V_{DD}). Lorsque $V_{in} = V_{DD} = 5$ V, pour 1 et 10 M Ω , la sortie V_{out} est quasi-nulle tandis qu'elle dépasse 1 V pour $R = 0,1$ M Ω . De plus, il faut que la pente du basculement soit la plus verticale possible, ce qui exclut aussi la valeur $R = 1$ M Ω . **Le circuit constitue un inverseur logique pour $R = 10$ M Ω .**

3 Dans l'état bas, V_{out} est nulle donc

$$R I_{DS} = V_{DD}$$

La puissance dissipée est

$$p_c = I_{DS} V_{DD} = \frac{V_{DD}^2}{R} = \frac{5,0^2}{10 \cdot 10^6} = 2,5 \mu W$$

Pour mieux comprendre les implications de cette puissance, estimons la durée de fonctionnement d'un smartphone si tous ses transistors sont des inverseurs NMOS dans l'état bas. À la page 3, l'énoncé indique qu'il y a $N = 2 \cdot 10^9$ transistors dans les processeurs aujourd'hui. La puissance P perdue en régime statique est

$$P = N \times p_c = 5 \text{ kW}$$

ce qui rend le smartphone complètement inutilisable. **La puissance consommée par l'inverseur NMOS en statique explique son faible intérêt industriel.**

On peut même évaluer l'autonomie du smartphone en supposant ses pertes statiques égales à la 5 kW. L'énergie E stockée dans la batterie s'écrit en fonction de la capacité de la batterie Q et la tension nominale U :

$$E = Q \times U$$

Pour les smartphones récents, Q est de l'ordre de 3 A · h et U de l'ordre de 5 volts. Le téléphone aurait ainsi une autonomie Δt de l'ordre de

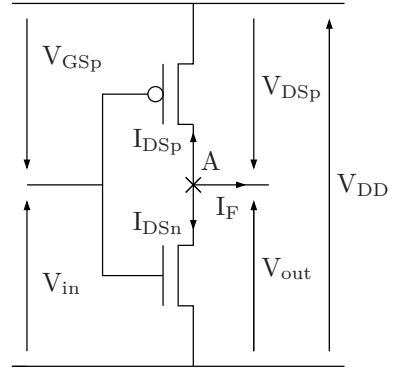
$$\Delta t = \frac{E}{P} \simeq \frac{3 \times 5 \times 3,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^9 \times 2,6 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ s}$$

Ceci justifie que les portes NMOS seules sont peu utilisées.

4 On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de fuite de courant à la sortie, c'est-à-dire que $I_F = 0$ sur le schéma. Ainsi, la loi des nœuds appliquée au point A donne

$$I_{DSn} = -I_{DSp}$$

Cela revient à supposer que l'impédance d'entrée du circuit connecté à la sortie de la porte CMOS est suffisamment grande pour négliger l'intensité I_F devant I_{DSn} et I_{DSp} .



De plus, les tensions satisfont

$$V_{DD} + V_{GSp} = V_{in} \quad \text{et} \quad V_{out} = V_{DD} + V_{DSp}$$

Montrons à l'aide de ces trois relations que le montage est bien inverseur.

- Si $V_{in} = 0$,

$$-V_{DD} = V_{GSp} < V_{tp} \quad \text{et} \quad 0 = V_{GSn} < V_{tn}$$

donc le transistor PMOS est passant tandis que le transistor NMOS est bloqué, ce qui implique

$$I_{DSp} = -I_{DSn} = 0$$

La tension V_{DSp} est déterminée par les caractéristiques tracées figure 5, où on voit qu'on a $V_{DSp} = 0$ lorsque I_{DSp} est nulle. Ainsi

$$V_{out} = V_{DD} + V_{DSp} = V_{DD}$$

ce qui signifie que la sortie est dans l'état haut.

- Si $V_{in} = V_{DD}$,

$$V_{GSp} = 0 > V_{tp} \quad \text{et} \quad V_{DD} = V_{GSn} > V_{tn}$$

donc le transistor PMOS est bloqué tandis que le transistor NMOS est passant, ce qui implique

$$I_{DSn} = -I_{DSp} = 0$$

La tension V_{DSn} (égale à V_{out}) est déterminée par les caractéristiques tracées figure 4, où on voit qu'on a toujours $V_{DSn} = 0$ quand I_{DSn} est nulle. Ainsi

$$V_{out} = 0$$

ce qui signifie que la sortie est dans l'état bas.

Finalement, l'état de sortie du circuit CMOS est l'opposé de l'état d'entrée, si bien que **ce circuit est un inverseur logique**.

5 À la question précédente, on a vu que les intensités I_{DSn} et I_{DSp} sont nulles pour les deux états. **La porte ne consomme donc pas de puissance électrique en régime statique.**

6 Pour la porte réelle, il existe toujours un courant de fuite I_F donc **la puissance dissipée en régime statique est non nulle.**

Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes.

- La première partie, significativement plus longue que la seconde, s'intéresse à l'étude thermodynamique d'une machine thermique, nommée STEP, dont l'objectif est de stocker, puis de restituer, de l'énergie électrique en transférant de l'énergie thermique d'une source chaude à une source froide. Cette section est séparée en quatre sous-parties liées. Dans un premier temps, le principe général de fonctionnement de la machine est étudié. En particulier le cycle théorique de Carnot est tracé en représentation (T, s) . Ensuite, la phase de stockage, durant laquelle la machine fonctionne en pompe à chaleur, est analysée plus en détail et le cycle réel est étudié afin de déterminer l'énergie massique pouvant être stockée par la machine. Dans la troisième sous-partie, très courte, le processus de stockage STEP est comparé aux autres processus connus de stockage de l'énergie électrique, en particulier celui par batteries électro-chimiques. Enfin la phase de déstockage est étudiée, permettant de déterminer le rendement réel de la machine et de le comparer au rendement théorique.
- La seconde partie est composée de cinq sous-parties. Tout d'abord, la notion de porosité du milieu constituant le réservoir de stockage est introduite par analogie avec la compacité développée en cristallographie. L'accumulation de l'énergie thermique au sein de l'enceinte de stockage est alors étudiée. L'énoncé invite d'abord à réfléchir à l'influence de la forme géométrique de l'enceinte, puis à celle de la porosité du milieu sur la quantité d'énergie pouvant être stockée. À cette fin, la notion de conductivité thermique effective d'un milieu poreux est introduite. Cette grandeur est d'abord évaluée théoriquement par l'intermédiaire de la notion de résistance thermique. Puis elle est calculée en exploitant un relevé expérimental.

Le sujet est long et la formulation des questions parfois ambiguë. Dans chaque partie, les questions forment un ensemble cohérent, si bien qu'il est difficile de ne pas les traiter linéairement. Il reste très proche du cours et ne présente pas de difficultés majeures sur le plan de la physique. Néanmoins, certaines questions sont calculatoires et il convient d'être bien inspiré et de ne pas se décourager pour y répondre. D'autres questions, plus qualitatives, nécessitent quant à elles un certain recul. Il constitue un bon sujet de révisions en thermodynamique et en conduction thermique.

INDICATIONS

Partie I

- 3 L'efficacité globale η_{TOT} du processus de stockage est le produit des efficacités de chacun des processus.
- 4 Un cycle de Carnot est composé de deux transformations isothermes réversibles et de deux transformations adiabatiques réversibles.
- 6 Utiliser la pente de l'isobare en représentation (T, s) pour montrer qu'à une entropie plus élevée correspond une température plus haute.
- 7 Utiliser le premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire.
- 8 Exprimer les variations d'enthalpie d'un gaz parfait en fonction des variations de température. Appliquer la loi de Laplace sur les transformations isentropiques afin d'exprimer T_{3is} et T_{1is} .
- 11 Pour un gaz parfait, la capacité thermique massique c_p s'exprime en fonction de la masse molaire M , du coefficient adiabatique γ et de la constante des gaz parfaits R .
- 16 Montrer que les rendements par rapport à l'isentropique peuvent s'écrire

$$\eta_{cd} = \frac{T_{0dis} - T_3}{T_{0d} - T_3} \quad \text{et} \quad \eta_{td} = \frac{T_{2d} - T_1}{T_{2dis} - T_1}$$

Ensuite utiliser la loi de Laplace pour exprimer T_{0dis} et T_{2dis} en fonction respectivement de T_3 et T_1 .

- 17 Déterminer les valeurs minimales prises par T_{0d} et T_{0n} lorsqu'on fait varier les rendements η_{cd} , η_{td} , η_{cs} et η_{ts} .

Partie II

- 27 La porosité est reliée à la compacité par la relation $\varepsilon = 1 - C$.
- 30 Le stockage d'énergie peut continuer dans le régénérateur tant que le front thermique n'a pas atteint l'extrémité d'abscisse $z = h$ de l'enceinte.
- 31 Afin que le transfert thermique soit non nul, bien que le gradient de température tende vers 0, le coefficient conducto-convectif h doit tendre vers l'infini.
- 35 Utiliser la notion de résistance thermique et d'associations série et parallèle de résistances.
- 36 On pourra étudier, sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction

$$f(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\text{parr}}(\varepsilon)}{\lambda_{\text{série}}(\varepsilon)} - 1$$

- 40 Exprimer la loi de Fourier en $r = r_0$.
- 42 Montrer qu'aux temps longs, $\Delta T = f(\ln t)$ suit une loi affine.

STOCKAGE D'ÉNERGIE PAR POMPAGE THERMIQUE (PROCÉDÉ SEPT)

I. ANALYSE THERMODYNAMIQUE DU PROCÉDÉ SEPT

1 Le coefficient de performance énergétique η_{PAC} , aussi appelé efficacité, est défini comme le rapport du transfert thermique réalisé avec la source chaude $Q_{\text{H,PAC}}$ sur le travail W_{PAC} nécessaire à la réalisation de ce transfert. Les transferts sont considérés en convention récepteur (positifs si de l'énergie est reçue par la machine thermique). Par conséquent, pour un fonctionnement en pompe à chaleur, $Q_{\text{H,PAC}} < 0$ et $W_{\text{PAC}} > 0$. Ainsi,

$$\eta_{\text{PAC}} = \left| \frac{Q_{\text{H,PAC}}}{W_{\text{PAC}}} \right| = -\frac{Q_{\text{H,PAC}}}{W_{\text{PAC}}}$$

En introduisant $Q_{\text{B,PAC}}$ le transfert thermique réalisé avec la source froide et S_c l'entropie créée, le second principe de la thermodynamique sur un cycle s'écrit

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{H,PAC}}}{T_{\text{H}}} + \frac{Q_{\text{B,PAC}}}{T_{\text{B}}} + S_c = 0$$

L'entropie créée étant positive, on obtient

$$\frac{Q_{\text{H,PAC}}}{T_{\text{H}}} + \frac{Q_{\text{B,PAC}}}{T_{\text{B}}} \leq 0$$

| Cette relation est appelée inégalité de Clausius.

Il vient, avec $Q_{\text{H,PAC}} < 0$,

$$\frac{Q_{\text{B,PAC}}}{Q_{\text{H,PAC}}} \geq -\frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{H}}}$$

Par ailleurs, le premier principe de la thermodynamique sur un cycle s'écrit

$$\Delta U = Q_{\text{H,PAC}} + Q_{\text{B,PAC}} + W_{\text{PAC}} = 0$$

Remplaçons W_{PAC} par son expression en fonction des transferts thermiques. Il vient

$$\eta_{\text{PAC}} = \frac{Q_{\text{H,PAC}}}{Q_{\text{H,PAC}} + Q_{\text{B,PAC}}} = \frac{1}{1 + Q_{\text{B,PAC}}/Q_{\text{H,PAC}}}$$

Avec $\frac{Q_{\text{B,PAC}}}{Q_{\text{H,PAC}}} \geq -\frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{H}}}$,

$$\eta_{\text{PAC}} \leq \frac{1}{1 - T_{\text{B}}/T_{\text{H}}}$$

Le coefficient η_{PAC} atteint sa valeur maximale lorsque le cycle est **réversible** et que l'inégalité devient une égalité. Cette valeur ne dépend, pour une machine ditherme, que des températures des sources chaude et froide, et s'écrit

$$\eta_{\text{PAC,max}} = \frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{B}}}$$

2 Le rendement du moteur η_{MOT} est défini comme le rapport du travail W_{MOT} sur le transfert thermique avec la source chaude $Q_{\text{H,MOT}}$ nécessaire à la production dudit travail. Pour un fonctionnement moteur, $Q_{\text{H,MOT}} > 0$ et $W_{\text{MOT}} < 0$, d'où

$$\eta_{\text{MOT}} = \left| \frac{W_{\text{MOT}}}{Q_{\text{H,MOT}}} \right| = -\frac{W_{\text{MOT}}}{Q_{\text{H,MOT}}}$$

L'inégalité de Clausius est toujours satisfaite, mais ici $Q_{H,MOT} > 0$ donc

$$\frac{Q_{B,MOT}}{Q_{H,MOT}} \leq -\frac{T_B}{T_H}$$

Ainsi
$$\eta_{MOT} = 1 + \frac{Q_{B,MOT}}{Q_{H,MOT}} \leq 1 - \frac{T_B}{T_H}$$

Lorsque le cycle est **réversible**, le rendement du moteur atteint le rendement de Carnot, si bien que

$$\eta_{MOT,max} = 1 - \frac{T_B}{T_H}$$

3 Le processus global n'est autre que la succession d'un stockage d'énergie dans H lors du fonctionnement en pompe à chaleur, puis de sa restitution lors du fonctionnement moteur. L'efficacité globale du processus de stockage η_{TOT} est donc le produit de l'efficacité de la pompe à chaleur et du rendement du moteur. Par ailleurs, en supposant ces deux processus réversibles, il vient

$$\eta_{TOT} = \eta_{PAC,max} \times \eta_{MOT,max} = \frac{T_H}{T_H - T_B} \times \frac{T_H - T_B}{T_H} = 1$$

L'efficacité globale du processus est donc unitaire : **l'énergie stockée est alors intégralement récupérable.**

4 Toutes les transformations sont supposées réversibles. Celles réalisées avec les thermostats sont des transformations isothermes réversibles. Elles sont donc représentées par des segments horizontaux dans le diagramme (T, s) . Les transformations réalisées dans la turbine et le compresseur sont adiabatiques réversibles. Elles sont représentées par des segments verticaux dans le diagramme (T, s) , puisqu'une transformation adiabatique réversible est isentropique.

Déterminons le sens de parcours du cycle moteur :

- D'après le second principe appliqué au fluide caloporteur lors du contact avec la source chaude, en fonctionnement réversible,

$$\Delta S = \frac{Q_H}{T_H}$$

Puisque lors de cette phase, $Q_H > 0$ en fonctionnement moteur, $\Delta S > 0$ et l'entropie du fluide caloporteur augmente lors du contact avec la source chaude.

- De manière analogue, $Q_B < 0$ et $\Delta S < 0$ lors du contact avec la source froide. L'entropie du fluide caloporteur diminue lors du contact avec la source froide en fonctionnement moteur.

Pour la pompe à chaleur, les signes de Q_H et Q_B sont inversés et il en va de même pour les signes des variations d'entropie du fluide caloporteur.

Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Jacques Ding (École Polytechnique), Vincent Freulon (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude de différents domaines de la physique et de la chimie qui entrent en compte lors du vol d'un airbus A320.

- Dans la partie I, on caractérise la portance et la traînée d'une aile symétrique dans les conditions de vol, en examinant en particulier la notion de finesse et la question du décrochage.
- La partie II est consacrée à l'étude thermodynamique d'un turboréacteur à double flux en régime stationnaire. On étudie dans un premier temps l'élévation de température du gaz due à la combustion du carburant (du décane) avant de caractériser les variations de température aux différents étages du turboréacteur. En dernier lieu, on s'intéresse à la poussée du réacteur en considérant celui-ci comme un ensemble de deux systèmes ouverts correspondant aux flux chaud et froid qui le traversent.
- La partie III s'intéresse aux oxydes d'azote NO et NO₂. Les questions traitent essentiellement de thermodynamique et de cinétique.
- Dans la partie IV, on étudie un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique. Une première sous-partie présente un diagramme binaire avec composé défini qu'il convient de lire et d'utiliser. Une seconde sous-partie aborde les courbes courant-potentiel. Questionnement quantitatif et raisonnement qualitatif sont utilisés.

Les deux parties de physique donnent une bonne idée des notions associées à la portance d'une aile et au fonctionnement d'un turboréacteur. L'ensemble respecte bien le programme et les questions, classiques, correspondent à ce qui est généralement attendu au concours dans la filière PSI. Ce problème constitue donc un très bon entraînement pour les sessions futures.

INDICATIONS

Partie I

- 3 L'A320 possède deux ailes et l'angle α n'est pas nul en vol horizontal.
- 13 Remarquer que pour tout point M de coordonnées (C_x, C_y) sur la courbe de la figure 6, l'angle θ entre l'axe horizontal et \overrightarrow{OM} vérifie $\tan \theta = C_y/C_x = f$.
- 14 L'abscisse de la figure 6 doit être multipliée par un facteur 10^{-2} et l'origine de son ordonnée est décalée au milieu de l'axe.

Partie II

- 17 L'air est constitué à 80 % de diazote. La température de ce gaz et des produits de la réaction de combustion s'élève suite à l'énergie libérée par celle-ci.
- 18 Une erreur s'est glissée dans l'énoncé : il faut exprimer P_j en fonction de P_i , T_i , T_j et γ et supposer la transformation isentropique.
- 19 L'énoncé omet de préciser que l'étape $1 \rightarrow 2$ est adiabatique et réversible. Le couplage mécanique permet de déterminer T_5 .
- 20 Aucun travail massique utile n'est échangé dans les étages du turboréacteur qui ne comportent pas de pièce mobile, en particulier dans la tuyère.
- 22 Prendre un volume de contrôle englobant tout le gaz impliqué dans le flux chaud (resp. froid) depuis l'entrée dans la soufflante jusqu'à la sortie de la tuyère. Faire un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé défini par la réunion de le gaz contenu dans ce volume de contrôle et celui y entrant entre t et $t + dt$. La troisième loi de Newton permet d'en déduire la force de poussée exercée sur le réacteur.

Partie III

- 29 Calculer dans un premier temps la valeur de la constante d'équilibre à l'aide des grandeurs standard de réaction. Utiliser ensuite la relation fondamentale de l'équilibre.
- 31 Supposer que la réaction admet un ordre. Utiliser la pente des droites pour déterminer un premier ordre partiel puis les ordonnées à l'origine pour déterminer le second et la constante de vitesse. Il est commode d'exprimer toutes les concentrations en $\mu\text{mol.L}^{-1}$.
- 33 Lorsque le rendement quantique s'approche de 1, on fournit toujours suffisamment d'énergie pour rompre la liaison, ce qui correspond à l'énergie de liaison.

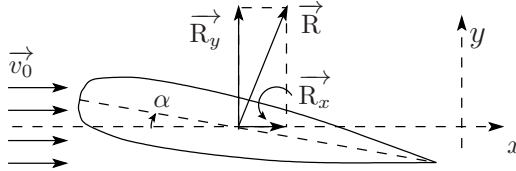
Partie IV

- 34 Le composé défini correspond à la frontière verticale. Calculer la fraction molaire en cuivre pour déterminer la formule brute.
- 37 Considérer que la phase α est constituée d'aluminium pur à 300 K puis appliquer le théorème des moments chimiques.
- 40 La valeur de \mathcal{F} donnée dans l'énoncé est fautive, il faut lire $\mathcal{F} = 9,64 \cdot 10^4 \text{ C.mol}^{-1}$. Le potentiel standard apparent est le potentiel rédox du couple lorsque toutes les espèces, sauf H^+ , sont dans l'état standard.
- 42 Le potentiel de corrosion est le potentiel pris par l'anode et la cathode simultanément. Comment doivent être les courants anodique et cathodique ?
- 43 Complexer l'oxydant d'un couple rédox a pour effet de baisser le potentiel standard du couple.

ÉTUDE SIMPLIFIÉE DU VOL D'UN AIRBUS A320

I. L'AIRBUS A320 EN VOL

1 L'axe (Ox) coïncide avec la direction de la vitesse du vent relatif. La projection de \vec{R} sur cette direction donne la force de traînée \vec{R}_x . La composante orthogonale à \vec{v}_0 est la portance \vec{R}_y .



2 Effectuons un bilan des forces s'exerçant sur l'avion lorsque celui-ci est en vol horizontal dans le référentiel terrestre supposé galiléen, c'est-à-dire lorsque l'axe (Ox) est perpendiculaire à l'accélération de la pesanteur :

- La réaction de l'air sur chacune des deux ailes de l'A320. Pour une aile de surface S_{aile} , $\vec{R}_{\text{aile}} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$. Puisque l'A320 possède deux ailes et qu'on néglige la réaction sur les autres éléments constitutifs de l'avion, la réaction totale de l'air sur l'avion est $\vec{R} = 2\vec{R}_x + 2\vec{R}_y$.
- Le poids $\vec{P} = -m g \vec{e}_y$.
- La poussée des réacteurs $\vec{F} = F \vec{e}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'avion en translation rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre s'écrit

$$2\vec{R}_x + 2\vec{R}_y + F\vec{e}_x - m g \vec{e}_y = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y . Il vient

$$2R_x = F \quad \text{et} \quad 2R_y = m g$$

D'après l'énoncé, les coefficients aérodynamiques de l'avion sont assimilables à ceux des ailes. Substituons les expressions de R_x et R_y pour obtenir, d'une part, l'équation de propulsion

$$\rho S_{\text{aile}} v_0^2 C_x = F$$

et, d'autre part, l'équation de sustentation

$$\rho S_{\text{aile}} v_0^2 C_y = m g$$

3 L'équation de sustentation permet d'exprimer la vitesse v_0 en fonction de C_y :

$$v_0 = \sqrt{\frac{m g}{C_y \rho S_{\text{aile}}}}$$

Sur la figure 2, on lit $C_y = 0,4$ pour $\alpha = 3^\circ$, d'où

$$v_0 = \sqrt{\frac{m g}{C_y \rho S_{\text{aile}}}} = \sqrt{\frac{60.10^3 \times 9,8}{0,4 \times 1,2 \times 3 \times 12}} = 2.10^2 \text{ m.s}^{-1} = 7.10^2 \text{ km.h}^{-1}$$

Injectons ce résultat dans l'équation de propulsion pour obtenir la force de poussée F . La figure 2 donne $C_x = 0,02$ pour $\alpha = 3^\circ$, si bien que

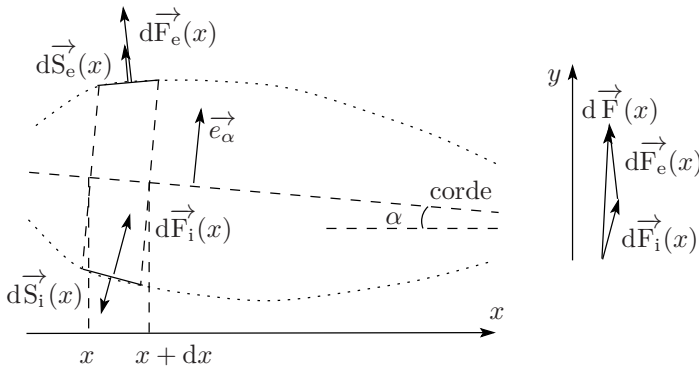
$$F = \rho S_{\text{aile}} v_0^2 C_x = 1,2 \times 3 \times 12 \times (2.10^2)^2 \times 0,02 = 3.10^4 \text{ N}$$

4 Par définition,
$$K_p = \frac{P - P_0}{P_t - P_0}$$

La surpression en tout point d'abscisse x à la surface de l'aile :

$$\Delta P(x) = P - P_0 = (P_t - P_0) K_p = \frac{1}{2} \rho v_0^2 K_p(x)$$

La surpression ΔP est proportionnelle à K_p et ces deux grandeurs sont du même signe. Pour $\alpha \neq 0^\circ$, les courbes de la figure 4 montrent que le coefficient de pression de l'intrados est supérieur au coefficient de pression de l'extrados en tout point de la corde. La figure ci-dessous montre deux éléments de surface symétriques $d\vec{S}_e(x)$ (pour l'extrados) et $d\vec{S}_i(x)$ (pour l'intrados) à l'abscisse x de la corde ainsi que les forces qui s'appliquent. On y introduit le vecteur normé \vec{e}_α perpendiculaire à la corde.



La figure 2 montre en outre que $C_x \ll C_y$, donc que la résultante des forces hydrodynamiques est principalement la portance. Par conséquent, les éléments de surface de l'aile sont faiblement inclinés par rapport à \vec{e}_α si bien qu'on considère qu'ils sont orientés suivant ce vecteur. Ainsi,

$$d\vec{S}_e(x) = dS \vec{e}_\alpha \quad \text{et} \quad d\vec{S}_i(x) = -dS \vec{e}_\alpha$$

Dès lors, la résultante des forces de pression sur un élément de surface dS de l'aile, correspondant à une portion de la corde située entre x et $x+dx$, découle de la pression exercée sur chaque côté de l'aile, d'où

$$d\vec{F}_\alpha = d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = -\left(P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 K_{p,e}(x)\right) dS \vec{e}_\alpha + \left(P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 K_{p,i}(x)\right) dS \vec{e}_\alpha$$

soit
$$d\vec{F}_\alpha = \frac{1}{2} \rho v_0^2 (K_{p,i}(x) - K_{p,e}(x)) dS \vec{e}_\alpha$$

D'après la figure 4, $K_{p,i}(x) > K_{p,e}(x)$, donc

$$d\vec{F}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha > 0$$

pour tout élément de surface de l'aile. Il en résulte que la force totale \vec{F}_α est dans le même sens que \vec{e}_α . Projétons cette force sur \vec{e}_y pour obtenir la force de portance :

$$F_y = \vec{F}_\alpha \cdot \vec{e}_y = F_\alpha \cos \alpha$$

L'angle α est petit donc $\cos \alpha > 0$, si bien que la force de portance est positive.

Mines Physique 1 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de deux parties indépendantes s'articulant autour de la civilisation maya.

La première partie porte sur l'étude de l'écho d'un claquement de mains après réflexion sur l'escalier d'une pyramide maya. Cet écho ressemble à s'y méprendre au chant d'un quetzal, oiseau sacré pour les Mayas. Après quelques rappels sur les spectres de signaux périodiques et leur résolution expérimentale, on étudie le spectre du cri d'un quetzal en fonction du temps. On s'attache alors à montrer que la réflexion de l'onde sonore produite par le claquement de mains sur les marches de la pyramide maya présente un spectre analogue. Pour ce faire, l'étude du déphasage entre les ondes réfléchies par les marches successives, est réalisée. On montre que les interférences entre les différentes ondes sélectionnent des fréquences, réfléchies les unes après les autres, conduisant effectivement à un spectre semblable au chant du quetzal.

Dans la partie II, on s'intéresse à la visibilité et à la couleur de la Lune, astre majeur chez les Mayas, au cours d'une éclipse. Alors qu'elle est entièrement plongée dans l'ombre de la Terre, la Lune reste visible. Une première explication possible de cet effet serait la diffraction des rayons solaires par la Terre. Une estimation rapide permet de l'écarter. La seconde raison envisagée est la réfraction des rayons du Soleil par l'atmosphère terrestre. À l'aide du modèle de l'atmosphère isotherme et en s'appuyant sur l'électromagnétisme pour modéliser la lumière, on décrit l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement solaire. La déviation des rayons lumineux par l'atmosphère est alors estimée et il apparaît qu'elle permet d'expliquer la visibilité de la Lune.

Cette épreuve, dont la thématique est originale, n'en demeure pas moins classique dans sa construction. Elle est abordable en deuxième année dès que les chapitres sur la numérisation des signaux, les ondes électromagnétiques et la loi de l'hydrostatique ont été traités.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Le gain en dB de a_2 par rapport à a_1 est défini par $G_{\text{dB}} = 20 \log(a_2/a_1)$.
- 9 Traduire la condition d'interférences constructives entre l'onde ayant parcouru la distance $2d_n$ et celle ayant parcouru $2d_{n+1}$.
- 10 Commencer par montrer que

$$d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2b^2(2n+1) \simeq 2d_n(d_{n+1} - d_n)$$

Partie II

- 17 Utiliser les lois de l'hydrostatique et du gaz parfait. Intégrer à T constante.
- 19 La polarisation de l'onde correspond à la direction de son champ électrique. La relation de structure des ondes électromagnétiques planes dans le vide permet de déterminer $\vec{B}(M, t)$.
- 20 L'intensité I_0 est égale à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting.
- 22 Remarquer que $I(x)S$ se répartit entre trois termes.
- 23 Développer $I(x + dx)$ à l'ordre 1 en dx . Reconnaître une équation différentielle linéaire du premier ordre. Injecter la solution proposée, identifier d'_0 .
- 25 Développer le rapport r^2/r_0^2 à l'ordre 1 en Z/R_T et Z_0/R_T . Différencier la relation fournie entre $n(Z)$ et $\rho_a(Z)$ et celle établie à la question 17.
- 26 Injecter les expressions de dn , $d\rho_a$ obtenues à la question précédente dans celle de θ_d fournie. Remarquer que $n \rightarrow 1$ lorsque $u \rightarrow \infty$. Effectuer le changement de variable $v = u/H_c$.
- 27 Différencier l'expression obtenue à la question précédente et éliminer $\delta\varepsilon_\lambda$ au profit de $\delta\lambda$ grâce à la relation de l'énoncé.
- 28 Le Soleil possède un rayon supérieur à la celui de la Terre, donc le rayon extrême, qui est vu sous un angle de $16'$, n'est pas incliné comme sur la figure 11.

AU TEMPS DES MAYAS

I. ÉCHO DE LA GRANDE PYRAMIDE DE CHICHÉN ITZÁ

1 Sur la figure 3, on lit

$$f_1 = 1,5 \text{ kHz}$$

Le pic 2, à la fréquence $f_2 = 3,0 \text{ kHz}$, a une amplitude de 50 dB inférieure à celle du pic 1. On en déduit que

$$-50 = 20 \log \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \times 10^{-5/2} \\ &= 10^2 \times 10^{-3+1/2} \\ &= 10^2 \times 10^{-3} \times 3,16 \end{aligned}$$

Il vient

$$a_2 = 0,316 \text{ mV}$$

2 D'après le critère de Shannon, pour échantillonner correctement un signal dont la fréquence la plus élevée est f_2 , il faut

$$f_e > 2f_2$$

Ici $f_2 = 3,0 \text{ kHz}$, donc

$$f_e > 6,0 \text{ kHz}$$

Puisque $T_a = 1/\delta f$, on choisit une durée d'acquisition T_a telle que

$$T_a = 10,0 \text{ ms}$$

3 La transformée de Fourier discrète, effectuée pour tracer le spectre d'une acquisition, est calculée sur la durée T_a , donc c'est la durée T_a qui **fixe la résolution δf** et pas la durée totale de l'enregistrement τ .

L'axe des temps est découpé en intervalles de durée T_a . Il y a τ/T_a intervalles de temps. L'axe des fréquences est découpé en intervalles de largeur δf . Il y a $f_M/\delta f$ tels intervalles. Par conséquent, on compte

$$\frac{\tau f_M}{T_a \delta f} = \tau f_M = 0,5 \times 3,5 \cdot 10^3 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ pixels}$$

4 Pour pouvoir suivre la dérive en fréquence, il faut que cette dérive soit quasiment négligeable à l'échelle d'une acquisition de durée T_a . Cela n'est possible que si

$$\tau_d \gg T_a$$

Il faut également que la résolution verticale du spectre soit suffisante pour permettre de visualiser la dérive de f'_1 sur la durée τ . Pour pouvoir nettement distinguer ces deux fréquences (et les valeurs intermédiaires prises par f'_1), on doit avoir

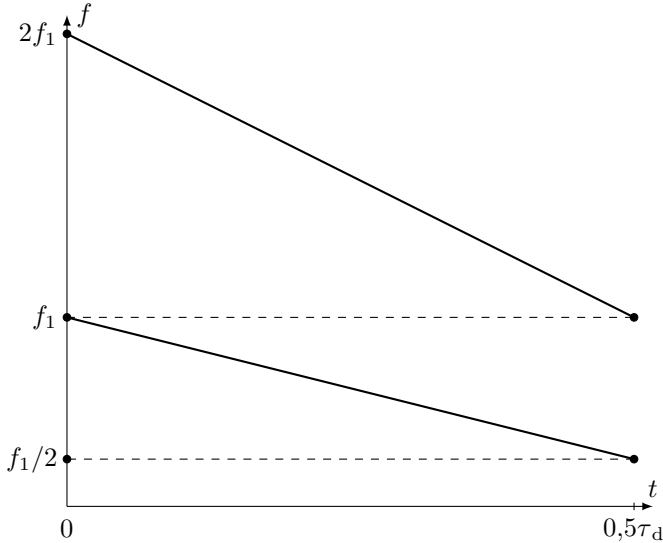
$$\delta f \gg f'_1(0) - f'_1(\tau) \quad \text{soit} \quad \tau_d \ll \frac{f_1 \tau}{\delta f}$$

Le sonogramme est alors constitué de deux segments de droite d'équations :

$$\begin{cases} f'_1(t) = f_1 (1 - t/\tau_d) \\ f'_2(t) = 2f_1 (1 - t/\tau_d) \end{cases}$$

en particulier
$$\begin{cases} f_1'(0) = f_1 \\ f_2'(0) = 2f_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_1'(\frac{\tau_d}{2}) = \frac{f_1}{2} \\ f_2'(\frac{\tau_d}{2}) = f_1 \end{cases}$$

Le sonogramme correspondant présente l'allure suivante :



5 Le chant débute vers 60 ms et s'arrête vers 210 ms donc

$$\tau_q \simeq 150 \text{ ms}$$

À la date $t = 140$ ms, le fondamental et les harmoniques sont aux fréquences :

i	1	2	3	4
f_{qi} (kHz)	0,5	1,1	1,6	2,2

6 En S_n l'onde a accumulé le retard d_n/c_s par rapport à son instant d'émission. Comme on néglige toute atténuation due à la propagation,

$$\Psi(S_n, t) = \Psi\left(S, t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

donc

$$\Psi(S_n, t) = s\left(t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

Elle accumule de nouveau un retard d_n/c_s pour revenir au point S. En prenant en compte le coefficient de réflexion κ , il vient

$$\Psi'(S, t) = \kappa \Psi\left(S, t - \frac{2d_n}{c_s}\right) = \kappa s\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

7 D'après la question précédente,

$$\phi_n'(t) = \omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

Mines Physique 2 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Frémont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Qu'elle soit d'origine acoustique, magnétique ou encore optique, la lévitation est un phénomène physique qui fascine les petits comme les grands et, parmi eux, les physiciens. Depuis quelques années, plusieurs équipes de recherche sont parvenues à faire léviter, grâce à une onde acoustique, de petites billes de polystyrène. Au-delà de son aspect ludique, la lévitation acoustique de petites particules ou de gouttelettes pourrait offrir de nouvelles perspectives en biologie, en chimie analytique, ou encore dans l'industrie nucléaire. Ici, le sujet propose d'aborder le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée, à travers deux parties totalement indépendantes.

- Dans la première partie, on s'intéresse au dispositif de lévitation acoustique le plus simple qui puisse être envisagé : un émetteur piézoélectrique placé face à un réflecteur plan génère une onde acoustique stationnaire résonante. On détermine le champ de pression caractéristique de cette onde puis la résultante des forces de pression subies par une bille en présence de l'onde. Cela mène à une discussion sur l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité. Cette partie, plutôt guidée, sollicite des notions et méthodes classiques du cours consacré aux ondes acoustiques dans les fluides, ainsi qu'à la mécanique du point et à la statique des fluides.
- La partie II est consacrée à un pan concret de la mise en œuvre du dispositif de la partie I : l'alimentation de l'émetteur piézoélectrique par un convertisseur de puissance. Une fois identifiée la séquence de commande des interrupteurs électroniques, on détermine les conditions qui permettent d'obtenir une tension d'alimentation alternative quasi-sinusoidale. Pour cela, il faut maîtriser le cours sur le filtrage linéaire et savoir exploiter le développement en série de Fourier (fourni) d'un signal périodique.

Construit de manière résolument progressive et de longueur raisonnable, ce sujet comporte un nombre significatif de questions de cours. En outre, il propose de nombreuses séquences d'interprétation physique, permettant aux candidats de montrer leur capacité à saisir les enjeux d'un dispositif concret, contemporain et stimulant. Enfin, le bon équilibre du questionnement entre restitution des acquis, pratique calculatoire et interprétation physique fait de ce sujet un excellent support de révision.

INDICATIONS

Partie I

2 Commencer par montrer que

$$\vec{a} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right] \vec{e}_z$$

puis simplifier cette expression dans le cadre de l'approximation acoustique.

6 La longueur d'onde doit être beaucoup plus grande que la distance sur laquelle l'énergie thermique diffuse pendant une période. Dans un milieu de diffusivité D , la distance caractéristique de diffusion ℓ^* est reliée à la durée t^* du phénomène par $\ell^* \sim \sqrt{D t^*}$.

8 Comparer Z_m à λ .

9 Le dispositif étudié présente de fortes similitudes avec la corde de Melde. On peut donc chercher v_1 sous la forme d'une onde stationnaire de pulsation ω .

11 Utiliser une des équations de couplage entre les champs v_1 et p_1 pour déterminer l'expression de ce dernier.

Avec l'hypothèse fournie, la résultante des efforts de pression, qui s'exercent sur la bille de volume \mathcal{V} , est donnée par

$$\vec{F} = -\mathcal{V} \overrightarrow{\text{grad}} P(z, t)$$

14 La stabilité d'une position d'équilibre z_{eq} dépend du signe de la dérivée de $\langle F_z \rangle$ en $z = z_{\text{eq}}$.

16 La période spatiale de $\langle F_z \rangle$ correspond à $\lambda/2$.

17 Poser $z(t) = z_{\text{eq}} + \varepsilon(t)$. À la limite $|\varepsilon(t)| \ll \lambda$, montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique pour une position d'équilibre stable.

Partie II

19 La source d'entrée ne doit jamais être court-circuitée, tandis que la charge ne doit jamais se retrouver en circuit ouvert.

20 Considérer la symétrie du signal sur l'intervalle $[0, T/2]$ pour justifier que les coefficients b_{2p} (p entier naturel) sont nuls.

21 L'harmonique $p = 1$ est celui qui contribue le plus à la distorsion du signal.

24 Déterminer le signal filtré associé à un harmonique quelconque de la tension u , puis exploiter la linéarité de l'opération de filtrage pour exprimer u_r sous forme d'une somme.

LA LÉVITATION ACOUSTIQUE

I. LA LÉVITATION GRÂCE À UNE ONDE SONORE

1 La propagation d'une onde acoustique dans l'air entraîne une perturbation de l'état du fluide par rapport à son état thermodynamique au repos. Cette perturbation est traduite par l'introduction des champs p_1 , μ_1 et v_1 dans la modélisation.

L'approximation acoustique consiste à supposer que :

- $|p_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$ (ces deux hypothèses sont déjà mentionnées dans l'énoncé) ;
- $|v_1| \ll c$ où c désigne la célérité du son dans le fluide support.

Dans le cadre de cette approche perturbative, les équations régissant le comportement du fluide en présence de l'onde sonore peuvent être simplifiées en ne conservant que les termes de plus petit ordre non nul relativement aux champs p_1 , μ_1 et v_1 , ainsi qu'à leurs dérivées partielles.

2 Supposons que la particule de fluide étudiée se trouve à l'abscisse z à l'instant t . Dans le référentiel du laboratoire, sa vitesse instantanée \vec{V} est alors

$$\vec{V}(t) = \vec{v}(z, t) = v_1(z, t) \vec{e}_z$$

À l'instant $t + dt$, cette même particule de fluide se trouve en $z + v_1(z, t) dt$ et sa vitesse instantanée s'écrit désormais

$$\vec{V}(t + dt) = \vec{v}(z + v_1(z, t) dt, t + dt) = v_1(z + v_1(z, t) dt, t + dt) \vec{e}_z$$

Par définition, son accélération $\vec{a}(t)$ à l'instant t est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + dt) - \vec{V}(t)}{dt} \\ &\simeq \frac{v_1(z + v_1(z, t) dt, t + dt) - v_1(z, t)}{dt} \vec{e}_z \\ \vec{a}(t) &\simeq \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}(z, t) \vec{e}_z}_{\text{ordre 1 en } v_1} + v_1(z, t) \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial z}(z, t) \vec{e}_z}_{\text{ordre 2 en } v_1} \end{aligned}$$

On néglige le terme d'ordre 2 en v_1 devant le terme d'ordre 1, ce qui donne

$$\vec{a} = \frac{\partial v_1}{\partial t}(z, t) \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(z, t)$$

Il est également possible de raisonner sur les ordres de grandeur. Notons v_1^* l'ordre de grandeur caractéristique de v_1 , alors

$$\left| \frac{\partial v_1}{\partial t} \right| \sim f v_1^* \quad \text{et} \quad \left| v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right| \sim \frac{v_1^{*2}}{\lambda}$$

où f est la fréquence de l'onde et $\lambda = c/f$ sa longueur d'onde. Ainsi

$$\frac{\left| v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|}{\left| \frac{\partial v_1}{\partial t} \right|} \sim \frac{v_1^*}{c} \ll 1$$

3 Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, en l'absence de tout phénomène dissipatif qui serait source d'irréversibilité, la particule de fluide envisagée dans la question précédente est soumise uniquement à :

- son poids $\mu_0 d\tau \vec{g}$;
- la résultante des efforts de pression $-\overrightarrow{\text{grad}} P(z, t) d\tau$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule de fluide s'écrit

$$\mu_0 d\tau \vec{a}(t) = \mu_0 d\tau \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P(z, t) d\tau$$

Après projection selon \vec{e}_z et simplification par $d\tau$, il en découle

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(z, t) = -\mu_0 g - \frac{\partial P}{\partial z}(z, t) \quad (1)$$

Dans le cas particulier de l'état de repos, l'équation établie reste valable ; alors

$$v_1 = 0 \quad \text{et} \quad P(z, t) = P_0(z)$$

Il apparaît que

$$0 = -\mu_0 g - \frac{dP_0}{dz}(z)$$

ce qui permet de simplifier l'équation (1) sous la forme

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(z, t) = -\frac{\partial p_1}{\partial z}(z, t) \quad (2)$$

4 Une fois linéarisée dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation locale de conservation de la masse devient

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(z, t) + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}(z, t) = 0 \quad (3)$$

L'équation d'évolution isentropique de la particule de fluide s'écrit quant à elle

$$\mu_1(z, t) = \mu_0 \chi_S p_1(z, t) \quad (4)$$

L'énoncé demande de « donner » les équations ci-dessus ; cela sous-entend qu'il n'est pas demandé de les établir.

5 Injectons tout d'abord l'équation (4) dans l'équation (3). Après simplification par μ_0 , il vient

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z, t) = 0 \quad (5)$$

Associée à l'équation (2), l'équation (5) fait apparaître un couplage spatio-temporel entre les champs p_1 et v_1 . Dérivons l'équation (2) par rapport à t et l'équation (5) par rapport à z :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(z, t) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial z}(z, t) = 0 \\ \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t}(z, t) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}(z, t) = 0 \end{cases}$$

Mines Chimie PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour thème le gadolinium. Il est constitué de trois parties de longueurs inégales. Certaines questions sont des applications directes du cours, d'autres sont plus délicates, que ce soit par leur aspect technique calculatoire, ou parce qu'elles concernent des études expérimentales peu évidentes.

- La première partie, la plus longue, s'intéresse au cation gadolinium(III), Gd^{3+} . Deux questions abordent la configuration électronique, puis la suite de la partie étudie des complexes de gadolinium(III). L'accent est mis sur des analyses expérimentales dont la spectrophotométrie est la technique principale. Absorbance et bilan d'avancement sont les outils essentiels pour mener à bien cette étude. Les questions 5 et 7 sont assez techniques et nécessitent d'écrire très précisément les bilans d'avancement.
- La deuxième partie concerne le gadolinium métallique. Trois questions très simples de cristallographie, qu'il convenait de traiter très rapidement, constituent le début de cette partie. On s'intéresse ensuite au diagramme binaire solide-liquide du système cuivre-gadolinium. Pour finir, on étudie la production de gadolinium métallique à partir du minerai. Une étude thermodynamique est conduite par l'intermédiaire des calculs des grandeurs standard de réaction.
- La troisième et dernière partie est la plus courte. On y étudie l'électrolyse d'une solution d'ions gadolinium(III), qui combine électrolyse de l'eau et précipitation d'hydroxyde de gadolinium à la cathode.

Cette épreuve est de si courte durée qu'elle nécessite rapidité, précision et concision. Il est indispensable de s'y préparer spécifiquement pour être efficace le jour du concours. En effet, il faut savoir repérer rapidement les questions très simples et les traiter en priorité pour revenir par la suite sur les questions plus difficiles. Ce sujet est un bon entraînement pour cet exercice particulier.

INDICATIONS

Partie A

- 3 La première acidité étant forte, l'espèce H_4Ch peut-elle prédominer ?
- 4 Relier l'évolution des pics d'absorbance à la production ou la consommation de l'espèce absorbante. Utiliser la notion de couleur complémentaire.
- 5 Dresser un tableau d'avancement pour exprimer les concentrations en ligand et en complexe. L'absorbance est additive.
- 6 L'intersection des asymptotes correspond à l'équivalence : les proportions sont alors stœchiométriques.
- 7 Dresser un tableau d'avancement puis faire apparaître le taux d'avancement α .
- 8 Penser à réaliser l'expérience à différents pH. Linéariser la relation.

Partie B

- 9 La coordinence est le nombre de plus proches voisins.
- 12 Les composés définis à fusion congruente sont ceux qui sont toujours vus en prépa : leur fusion se situe sur un maximum de la courbe du liquidus, et non pas sur un plateau (cas de la fusion non congruente).
- 13 Remarquer que tout le cuivre est sous forme de composé défini pour déterminer les proportions des deux phases finales.
- 14 Effectuer un développement limité de $\ln x$ au voisinage de $x = 1$.
- 15 Le chlorure d'ammonium est NH_4Cl ; les sous-produits sont H_2O et NH_3 .
- 16 Exprimer la température en kelvins.

Partie C

- 19 La réduction de l'eau forme du dihydrogène.
- 20 Pour réaliser une réaction non spontanée, il faut apporter de l'énergie grâce à un générateur.
- 21 Utiliser la valeur de $E^\circ(Gd^{3+}/Gd)$.
- 22 Utiliser la stœchiométrie de la réaction et la masse déposée par unité de surface pour exprimer la quantité surfacique de charge échangée. Puis utiliser la densité de courant pour trouver la quantité surfacique totale de charge et en déduire le rendement faradique.

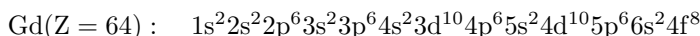
LE GADOLINIUM

A. L'ION Gd^{3+}

1 D'après les règles de remplissage de Klechkowski, Hund et Pauli, la sous-couche 5d ne devrait se remplir qu'après la sous-couche 4f, si bien que la configuration attendue est, avec la même notation que l'énoncé,



La notation [Xe] signifie que les électrons de cœur sont les mêmes que pour le gaz noble précédent, ici le xénon. La configuration complète serait

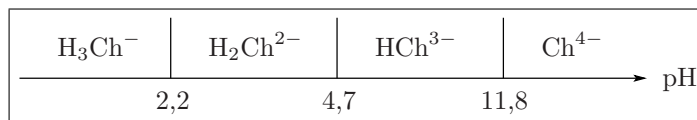


2 Le cation Gd^{3+} a perdu les trois électrons les plus périphériques (6s et 5d), qui sont aussi les plus énergétiques. De ce fait, il est **particulièrement stable**, ce qui explique qu'il soit le plus fréquemment observé. Par ailleurs, on peut également remarquer que la sous-couche 4f est à moitié remplie ($4f^7$), ce qui est une source de stabilité supplémentaire.

3 Pour un couple acido-basique noté AH/A^- , on a la relation

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

ce qui implique que l'acide AH prédomine ($[\text{AH}] > [\text{A}^-]$) si $\text{pH} < \text{pKa}$. Ici, le chrome azurol H_4Ch est un tétra-acide mais, la première acidité étant forte dans l'eau, l'espèce H_4Ch ne prédomine jamais (sa réaction avec l'eau est quantitative). On a donc le diagramme de prédominance suivant :

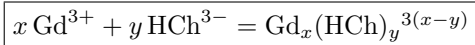


4 On observe sur la figure 1 que le maximum d'absorption du ligand libre S se situe vers 430 nm : on regarde la courbe 1, pour laquelle on n'a pas encore ajouté l'ion Gd^{3+} (sous forme de nitrate de gadolinium). Lors des ajouts successifs, la réaction de complexation se produit : le **ligand libre est consommé** et le **complexe est formé**. Cela se traduit par une diminution de l'absorbance à 430 nm et l'apparition d'une nouvelle absorption, de plus en plus intense à mesure que le complexe se forme, vers 545 nm (courbes 4 à 7).

Le maximum d'absorption du complexe se situe à la longueur d'onde 545 nm (valeur confirmée dans la suite de l'énoncé). La solution de complexe apparaît donc de la **couleur complémentaire** de cette longueur d'onde.

Le cercle chromatique n'étant pas au programme, les couleurs correspondant aux différentes longueurs d'onde ne sont pas exigibles. Seule la notion de « couleur complémentaire » est indispensable. Ici, notons que 545 nm correspond à du vert, la solution apparaît donc magenta.

5 La réaction de complexation s'écrit

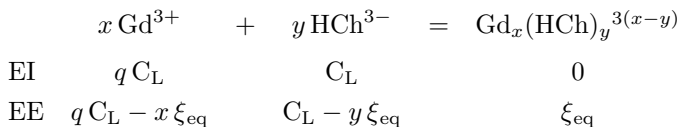


L'énoncé donnait la formule brute du complexe. On retrouve bien la complexation par la forme prédominante du ligand à pH = 5,9 (question 3).

L'absorbance est donnée par la loi de Beer-Lambert, qui est additive. À 545 nm, seul le complexe et le ligand absorbent (on suppose que Gd^{3+} n'absorbe pas dans le visible d'après l'énoncé, et on observe, sur la courbe 1 de la figure 1, que l'absorbance de la solution de ligand n'est pas nulle, à cette longueur d'onde). L'absorbance s'écrit

$$A = A_C + A_L = \varepsilon_C \ell [C] + \varepsilon_L \ell [L]$$

en notant C le complexe et L le ligand. Dressons un tableau d'avancement, en concentration, en supposant que tout le ligand est sous sa forme prédominante à pH = 5,9 :



Comme la réaction est quantitative, et comme le ligand est en excès, on a

$$\xi_{\text{eq}} \approx \frac{q C_L}{x}$$

et les concentrations [C] et [L] sont donc

$$[C] = [\text{Gd}_x(\text{HCh})_y^{3(x-y)}] = \frac{q C_L}{x} \quad \text{et} \quad [L] = [\text{HCh}^{3-}] = C_L \left(1 - q \frac{y}{x}\right)$$

On en déduit l'absorbance de la solution :

$$A = \ell C_L \left[\varepsilon_C \frac{q}{x} + \varepsilon_L \left(1 - q \frac{y}{x}\right) \right]$$

6 On considère les asymptotes sur la figure 2 et on observe deux cas distincts :

- L'absorbance croît d'abord linéairement au fur et à mesure que l'on ajoute le nitrate de gadolinium (q augmente), c'est-à-dire lorsque le complexe se forme (en accord avec l'expression $A = f(q)$ de la question précédente, dans la situation où la pente est positive). Cette première situation correspond à ce qui est étudié dans la question précédente où le ligand est en excès : on n'a pas encore ajouté assez d'ions gadolinium pour consommer la totalité du chrome azurol, on se trouve avant l'équivalence.
- Puis A reste constante lorsque la réaction est terminée. En effet, on ne produit plus de complexe et on néglige la dilution de sorte que la concentration en complexe absorbant reste constante, et donc l'absorbance aussi. Le ligand est totalement consommé : on se trouve après l'équivalence.

L'intersection des deux asymptotes correspond donc à l'**équivalence** : les deux réactifs sont introduits dans les proportions stœchiométriques. D'après l'équation de la réaction, cela revient à

$$\frac{[\text{Gd}^{3+}]_0}{x} = \frac{[\text{HCh}^{3-}]_0}{y}$$

X/ENS Physique PSI 2020 – Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet, constitué de trois parties indépendantes, s'intéresse à des expériences en lien avec la métrologie (science de la mesure). Fin 2018, une réforme importante du Système International a eu lieu. Elle a entraîné la redéfinition de plusieurs étalons, dont le kilogramme. C'est l'occasion d'aborder la précision des mesures.

- Dans la première partie, on étudie plusieurs problématiques liées à l'étalon de l'ancien prototype international du kilogramme. Après avoir étudié les aspects géométriques du système, on regarde les biais expérimentaux introduits par la poussée d'Archimède et le phénomène d'adsorption. Toute cette partie repose sur des notions de première année de mécanique et d'hydrostatique.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'effet Hall quantique et à son application dans la mesure précise de courants. On détermine l'expression de la tension de Hall grâce à une étude électromagnétique du système, puis on étudie un matériau ferromagnétique doux couplé à une sonde à effet Hall et son intérêt pour des expériences de métrologie.
- Dans la dernière partie, on manipule des notions de théorie du signal, comme la densité spectrale, sans s'appesantir sur l'interprétation des grandeurs introduites. En effectuant quelques calculs, on parvient ainsi à établir la relation de Johnson Nyquist. Cette relation traduit le lien entre la tension efficace aux bornes d'une résistance et l'agitation thermique. Elle est à la base du bruit thermique. Si ce bruit est en général négligeable en TP, il n'en va pas de même en métrologie.

L'épreuve, de longueur typique pour un sujet du concours X/ENS, fait appel aux programmes de première et seconde année. Elle mélange des questions calculatoires et des questions d'interprétation des systèmes et phénomènes étudiés. La calculatrice n'est plus autorisée pour cette épreuve. Les candidats sont donc invités à s'entraîner à faire les applications numériques à la main.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Déterminer la surface en fonction du seul paramètre D , puis résoudre à volume fixé, $dS/dD = 0$.
- 8 Pour des particules d'énergie potentielle individuelle E_p en équilibre isotherme à la température T , le facteur de Boltzmann est $\exp[-E_p/(k_B T)]$. Ici, $p(z)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann.
- 10 Il y a un équilibre liquide/vapeur en $z = d_{\text{liq}}$; ainsi $p(d_{\text{liq}}) = p_s(T_0)$.

Partie II

- 13 Utiliser la relation $\vec{j}_S = -N_s e \vec{v}$.
- 15 Les électrons sont déviés par le champ magnétique et chargent les parois.
- 18 La tension électrique V_H s'écrit

$$V_H = - \int_{-L/2}^{L/2} E_y dy$$

- 28 Écrire la conservation du flux entre l'entrefer et le milieu ferromagnétique, puis le théorème d'Ampère sur le contour \mathcal{C} .
- 32 Un signal périodique non sinusoïdal est constitué d'harmoniques de fréquences élevées.

Partie III

- 38 Injecter l'expression donnée dans l'équation différentielle de la question précédente. Dans ce cas, on rappelle que

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = f(x)$$

On peut aussi utiliser la méthode de variation de la constante.

- 40 Utiliser l'identité du formulaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0)$$

- 42 Le terme exponentiel peut être sorti de la valeur moyenne dans la limite $t \gg \tau_0$.
- 43 Faire le changement de variable proposé dans l'énoncé afin de faire apparaître le terme $\langle b(u)b(u + \tau) \rangle$.
- 44 L'énergie d'agitation thermique s'écrit $3 k_B T/2$.
- 46 On obtient une expression semblable à celle d'un filtre passe-bas.
- 50 La densité spectrale fait intervenir le produit de deux tensions. Chaque tension amène un préfacteur $R_0 e/L$.

MESURES DE PRÉCISION - APPLICATION À LA MÉTROLOGIE -

I. PROTOTYPE INTERNATIONAL DU KILOGRAMME

1 À masse et masse volumique fixées, la **sphère possède la surface extérieure minimale**. Cette dernière n'est **pas facile à maintenir en place** car elle peut facilement rouler.

2 Le volume V et la surface S d'un cylindre de hauteur h et de diamètre D s'écrivent respectivement

$$V = \frac{\pi h D^2}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{\pi D^2}{2} + \pi D h$$

La première relation impose $h = 4V/(\pi D^2)$

ce qui permet d'écrire $S(D) = \frac{\pi D^2}{2} + \frac{4V}{D}$

Calculons $\frac{dS}{dD}$ à V fixé : $\frac{dS}{dD} = \pi D - \frac{4V}{D^2}$

Le minimum est atteint en $D = D_0$, lorsque la dérivée est nulle, d'où

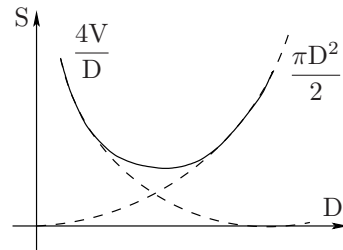
$$\pi D_0 - \frac{4V}{D_0^2} = 0$$

c'est-à-dire $D_0^3 = \frac{4V}{\pi}$

Comme $V = \pi h D^2/4$, on arrive à

$$\boxed{D = h}$$

On vérifie qu'il s'agit d'un minimum en traçant S en fonction de D ci-contre.



3 D'après la question précédente, $D = h$. Le volume s'écrit donc $V = \pi D^3/4$. De plus, la masse volumique vérifie

$$\rho = \frac{m}{V}$$

On en déduit

$$\boxed{V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2 \times 10^4} = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3}$$

Comme $V = \frac{\pi D^3}{4}$,

$$D = h = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3}$$

et

$$\boxed{D = \left(\frac{2}{\pi} \times 10^{-4}\right)^{1/3} \simeq (6 \times 10^{-5})^{1/3} \simeq 2 \times 0,02 = 4 \text{ cm}}$$

4 D'après la question précédente, $D = h \propto m^{1/3}$. Par dérivée logarithmique, il vient

$$\boxed{\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{3} \frac{\Delta m}{m} = 3 \times 10^{-9}}$$

On obtient $\Delta D = 0,12 \text{ nm}$, valeur inférieure à une couche atomique. Ce niveau de précision est **inaccessible en pratique**.

5 La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ s'écrit par définition

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{air}} V \vec{g} = -\frac{\rho_{\text{air}} \pi D^3}{4} \vec{g}$$

Cette force s'oppose au poids et donc **diminue la masse apparente**.

6 La poussée d'Archimède diminue la masse apparente d'un facteur $\rho_{\text{air}} V$, soit

$$|\Delta m_2| = \frac{\rho_{\text{air}} \pi D^3}{4}$$

7.a Utilisons la loi des gaz parfaits pour exprimer la masse volumique de l'air :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{p_{\text{air}} M}{N_A k_B T_{\text{air}}}$$

Avec la valeur numérique obtenue à la question 3 et $R = N_A k_B$,

$$|\Delta m_2| = \frac{p_{\text{air}} M \pi D^3}{4RT_{\text{air}}}$$

Ainsi,
$$|\Delta m_2| = \frac{10^5 \times 3 \times 10^{-2} \times 3 \times 16 \times 10^{-6}}{8,3 \times 300} = \frac{18}{3} \times 10^{-5} = 60 \text{ mg}$$

Sans prendre en compte la poussée d'Archimède, on commet une erreur relative de $\Delta m_2/m \simeq 6 \times 10^{-5}$ ce qui est significatif. **Il faut prendre en compte l'effet de la poussée d'Archimède lorsqu'on mesure la masse de l'étalon.**

7.b La masse apparente est proportionnelle à la masse volumique ρ_{air} . Il vient

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \left| \frac{\Delta(\Delta m_2)}{\Delta m_2} \right| = 2 \times 10^{-4}$$

Une variation infinitésimale de la masse volumique impliquerait **un décalage non négligeable sur la masse apparente**.

8 Les particules ont une énergie $W_{\text{ad}}(z)$ et sont à l'équilibre à la température T_0 . La pression est donc proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$p(z) = p_{\infty} \exp\left(-\frac{W_{\text{ad}}(z)}{k_B T_0}\right) = p_{\infty} \exp\left(\frac{K_{\text{ad}}}{k_B T_0 z^3}\right)$$

9 D'après la question précédente,

$$\lim_{z \rightarrow 0} p(z) = +\infty$$

Lorsque $p(z) > p_s(T_0)$, il y a **liquéfaction** et $p(z) = p_s(T_0)$.

X/ENS Modélisation PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Nicolas Courrier (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Le sujet de modélisation proposait cette année l'étude d'un hydrofoil, qui est un type de voilier disposant de plusieurs dérives portantes, appelées foils, permettant au bateau de sortir sa coque de l'eau et ainsi de diminuer la résistance du navire à l'avancement et d'augmenter ses performances en vitesse. Ce phénomène, appelé déjaugement, permet d'atteindre de grandes vitesses, proches de la centaine de kilomètres par heure pour les navires les plus performants. Cette épreuve est découpée en deux grandes parties.

- Dans la première partie, on cherche à développer un modèle dont on teste la validité à l'aide de valeurs mesurées des vitesses atteintes, puis à utiliser celui-ci pour déterminer les conditions d'instabilité. On fait apparaître l'existence d'une vitesse minimale pour laquelle les foils permettent à la coque de se soulever.
- La seconde partie porte sur les phénomènes physiques intervenant au niveau des actionneurs, afin de contrôler le voilier par l'intermédiaire d'une maîtrise des foils et d'obtenir les objectifs voulus.

La première partie, variée, fait appel à divers domaines : mécanique des fluides, mécanique du solide, informatique, et même réduction des endomorphismes suivant une démarche originale et rarement rencontrée. C'est une partie intéressante, qui contient quelques questions très calculatoires et trop peu guidées. La partie suivante, beaucoup plus classique, aborde des problématiques d'électromagnétisme et de diffusion thermique, ainsi qu'une grosse partie d'informatique portant sur l'algorithme du pivot de Gauss. Si le sujet est assez joli sur le fond, il pâtit de nombreuses faiblesses de forme : coquilles, imprécisions, résultats à établir qui s'avèrent faux... jusqu'à une question 33 qui apparaît deux fois. Ce sujet a toutefois le mérite de chercher l'originalité et de permettre de réviser de nombreux aspects du programme. Il est ardu et classant.

INDICATIONS

Partie A

- 1 L'énoncé ne fait pas l'hypothèse, pourtant indispensable, de stationnarité de l'écoulement.
- 3 La question consiste ici à comparer le comportement d'un foil avec celui d'une aile d'avion.
- 4 Écrire le moment d'un petit élément d'aile en un point I et, après intégration sur l'ensemble de l'aile, en déduire une condition pour que ce moment total soit nul. Il faut penser à passer par l'origine A de l'axe des abscisses.
- 8 La quantité intervenant dans la condition C1 peut s'interpréter graphiquement comme la pente d'une certaine droite passant par l'origine.
- 15 Le système n'admet des solutions que si le déterminant de sa matrice associée est non nul.
- 17 Il est astucieux et rapide de passer par un produit vectoriel.
- 18 Penser au théorème de Huygens pour calculer le moment dynamique, en introduisant le moment d'inertie au centre de gravité dans un premier temps.
- 20 Erreur d'énoncé, le vecteur à droite est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 23 La fin de cette partie peut être traitée quasiment entièrement même si l'on n'a pas établi la relation de la question 22.

Partie B

- 29 Attention, l'énoncé suppose qu'il n'y a aucun courant dans la phase A. Les phénomènes magnétiques qui vont avoir lieu sont une conséquence du champ rémanent.
- 38 Ne pas oublier de prendre en compte les pertes Joule.
- 40 Développer le déterminant par rapport à la première ligne, puis les nouveaux déterminants qui apparaissent alors par rapport à une ligne bien choisie.

ÉTUDE D'UN HYDROFOIL

A. ÉTUDE DES SURFACES PORTANTES, DYNAMIQUE DU VOL ET ÉTUDE DE STABILITÉ

1 | L'énoncé ne précise pas que l'écoulement est stationnaire, ce qui est indispensable pour la suite, même si c'est assez implicite.

Lors de l'écoulement stationnaire et parfait d'un fluide incompressible et homogène, et en l'absence d'échanges de chaleur, le théorème de Bernoulli permet d'écrire sur une ligne de courant entre un point de la section S_0 et un autre de la section S_1 ,

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

De plus, l'énoncé supposant l'absence de variation d'énergie potentielle de pesanteur, l'expression se réduit à

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}$$

La conservation du débit volumique due à l'incompressibilité du fluide en régime indépendant du temps fournit

$$S_0 u_0 = S_1 u_1$$

Une reformulation de la formule de Bernoulli conduit à

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho u_1^2}{2} \left[\left(\frac{S_1}{S_0} \right)^2 - 1 \right]$$

Puisque $S_1 < S_0$,

$$\boxed{p_1 > p_0}$$

2 | Considérons le nombre de Reynolds R_e associé à cet écoulement.

$$R_e = \frac{u L_c}{\nu_e}$$

En introduction, l'énoncé indique que les vitesses les plus grandes sont de l'ordre de $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit

$$R_e \simeq \frac{25 \times 0,3}{10^{-6}} = 7,5 \cdot 10^6$$

Le nombre de Reynolds étant très grand devant 10^3 , l'écoulement est turbulent.

C'est la viscosité **cinématique** qui est fournie, il ne faut donc pas diviser par la masse volumique. D'ailleurs à la question 7, on retrouve la valeur approchée de ce nombre dans l'énoncé.

3 | Pour comparer les forces dans l'air et dans l'eau, on peut effectuer le rapport

$$\frac{F_{\text{portance,eau}}}{F_{\text{portance,air}}} = \frac{\rho_{\text{eau}} V_{\text{fluide,eau}}^2}{\rho_{\text{air}} V_{\text{fluide,air}}^2} \simeq \frac{1000 \times 25^2}{1,2 \times 240^2} \simeq \frac{1000 \times 24^2}{1 \times 240^2} = 10$$

Un calcul identique montre que le rapport des forces de traînée prend la même valeur. On en conclut que **les efforts subis par une aile d'hydrofoil ou d'avion de ligne sont du même ordre de grandeur.**

Usuellement, on considère que si deux grandeurs sont dans un rapport compris entre 0,1 et 10, elles sont du même ordre de grandeur.

Le texte n'est pas très clair, on peut comprendre à la première lecture qu'il s'agit de comparer forces de portance et de traînée, ce qui est impossible puisque l'on n'a aucune donnée sur les coefficients C_x et C_z .

4 On assimile l'aile à un segment. Un élément d'aile centré en un point M situé à une abscisse x et de longueur dx , subit la force élémentaire, somme de deux forces pressantes de l'air en dessous et au dessus, ce qui s'écrit

$$\vec{dF}(x) = p_{\text{intra}}(x) dx dz \vec{u}_y + p_{\text{extra}}(x) dx dz (-\vec{u}_y) = p(x) dx dz \vec{u}_y$$

L'énoncé indique même de prendre une largeur unitaire, ce qui n'est pas très heureux si l'on veut vérifier l'homogénéité des formules intermédiaires.

Le moment infinitésimal en un point I associé à cette force s'obtient alors grâce à une relation de Chasles :

$$\vec{dM}_I(x) = \vec{IM} \wedge \vec{dF}(x) = \vec{IA} \wedge \vec{dF}(x) + \vec{AM} \wedge \vec{dF}(x)$$

Pour avoir le moment total, on intègre sur toute la longueur du segment. Si on choisit I comme étant le point pour lequel ce moment total est nul, par définition de la longueur d , on parvient à l'égalité

$$\int_{x=0}^L \vec{IA} \wedge \vec{dF}(x) = - \int_{x=0}^L \vec{AM} \wedge \vec{dF}(x)$$

soit
$$\int_{x=0}^L -d \vec{u}_x \wedge p(x) dx dz \vec{u}_y = - \int_{x=0}^L x \vec{u}_x \wedge p(x) dx dz \vec{u}_y$$

En projetant sur \vec{u}_z ,
$$\int_{x=0}^L d p(x) dx dz = \int_{x=0}^L x p(x) dx dz$$

Après simplification par dz ,

$$d \int_0^L p(x) dx = \int_0^L x p(x) dx$$

d'où

$$d = \frac{\int_0^L x p(x) dx}{\int_0^L p(x) dx}$$

5 On parcourt chaque ligne de l'objet-fichier et, pour chacune d'entre elles, on crée une chaîne de caractères provisoire qui stocke les caractères lus successivement et se réinitialise à chaque rencontre d'un point-virgule, en même temps qu'elle stocke les caractères balayés dans une liste. Ainsi, on récupère les différentes informations que l'on peut convertir finalement depuis le type chaîne de caractères vers le type flottant. Enfin, le troisième terme contient le retour à la ligne, codé par `\n`, qu'il faut supprimer et qui a une taille égale à 1. On peut proposer le code suivant :

```
def Extraire(fichier):
    fich = open(fichier,'r') # Ouverture du fichier en lecture
    Valeurs = [] # Initialisation de la liste de sortie
    for ligne in fich: # Lecture ligne à ligne
```