Annales des Concours

PC
Mathématiques
2014

Sous la coordination de

Guillaume Batog
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Vincent Puyhaubert
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Walter Appel
Professeur en CPGE

Simon Billouet
ENS Cachan

Gauthier Gidel
ENS Ulm

François Lê
ENS Lyon

Benoît Landelle
Professeur en CPGE

Émilie Liboz
Professeur agrégé à l'université

Florence Monna
Doctorante

Pauline Tan
ENS Cachan

Principales disparitions du programme de mathématiques en PC

Algèbre générale, linéaire et bilinéaire

- hyperplans et formes linéaires
- comatrice
- structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps, morphismes
- polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice
- espaces préhilbertiens et produits scalaires complexes

Géométrie

- transformations et isométries affines
- coniques et quadriques
- paramétrage admissible d'un arc paramétré, abscisse curviligne, courbure
- les arcs paramétrés ne sont étudiés qu'au voisinage d'un point régulier ; les points suivants sont hors programme : paramétrage admissible, demi-tangente, branche infinie, théorème de relèvement, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure

Fonctions

- fonctions hyperboliques réciproques Argch, Argsh et Argth
- $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes
- inégalité des accroissements finis et formules de Taylor pour les fonctions à valeurs vectorielles
- matrice jacobienne

Topologie, suites et séries

- séries de Fourier
- normes équivalentes
- compacité
- approximation uniforme des fonctions d'une variable réelle
- polynômes d'interpolation de Lagrange

Intégrales

- intégrales des fonctions à valeurs vectorielles
- intégrales doubles et triples
- intégrale sur un arc, circulation, formule de Green-Riemann

Équations différentielles

- équations différentielles non linéaires
- wronskien
- méthode de variation des constantes
- équations différentielles sous forme non résolue, raccordements

Sommaire

Centrale-Supélec

Polytechnique

Formulaires

CCP Maths 1 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florence Monna (Doctorante en mathématiques) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur la notion de stabilité d'un polynôme, d'une matrice et d'un système différentiel, en prenant le cheminement inverse de celui habituellement utilisé dans ce domaine. La définition est en premier lieu introduite pour les polynômes et les matrices, pour lesquels elle n'est pas franchement intuitive : un polynôme P (respectivement une matrice A) est stable lorsque toutes ses racines (respectivement celles de χ_{A}) sont de partie réelle strictement négative. Le cas des systèmes linéaires, à l'origine en réalité du vocabulaire, est abordé en fin de sujet.

- La partie I traite le cas de la dimension 2 : des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité d'un polynôme et d'une matrice sont établies dans ce cas particulier. On étudie ensuite un exemple qui montre que les conditions précédentes ne sont pas suffisantes en dimension 3.
- La partie II introduit les outils théoriques de norme subordonnée et de mesure de Lozinskii en dimension finie quelconque. On y établit une relation entre les valeurs propres complexes d'une matrice et la mesure de Lozinskii de cette matrice ainsi qu'une condition suffisante pour qu'une matrice soit stable.
- La partie III reprend les outils de la partie II, qui se spécialisent, et les notions de norme et mesure associées à des matrices sont introduites.
- La partie IV s'appuie sur les résultats des parties II et III pour établir le critère de Routh-Hurwitz qui concerne la stabilité des polynômes unitaires de degré 3.
- La partie V est une application de la partie IV. On y introduit pour la première fois la notion de stabilité d'un système différentiel linéaire avant de l'étudier sur un exemple de taille 3. Les systèmes de ce type servent par exemple à l'étude locale d'équations différentielles non linéaires.

Toutes les questions de ce sujet sont conformes au programme en vigueur depuis la rentrée 2014. Il constitue un bon entraînement, d'autant que les raisonnements sur les polynômes sont classiques. La manipulation des normes est délicate dans certaines questions.

Indications

Partie I

I.2.a Utiliser les égalités démontrées à la question I.1 pour déterminer le signe de a et b.

I.2.b Se servir de la question I.1. pour obtenir le signe des réels z_1 et z_2.

I.4.b Exploiter le fait que z_1 et z_2 sont conjugués, démontré à la question I.4.a, ainsi que les égalités de la question I.1.

Partie II

II.1.c Utiliser le résultat de continuité prouvé à la question II.1.b.

II.1.f Appliquer le résultat de la question II.1.c à la matrice AB, et se servir de la réponse à la question II.1.e pour conclure.

II.3.b Utiliser les inégalités démontrées à la question II.1.f et le fait que la norme de l'identité vaille 1, prouvé en II.1.d.

II.3.c Se servir des résultats des questions II.1.f et II.1.d.

II.4.b Choisir x comme à la question II.4.a.

Partie III

III.2 Appliquer le théorème spectral à la matrice ${}^t\mathrm{A} + \mathrm{A}$.

III.3.b Exploiter l'égalité établie à la question III.1.

III.3.d Utiliser le résultat de la question III.3.a pour obtenir une majoration de la quantité $\| (\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})\, x\|_2^2$, puis appliquer le résultat de la question II.1.c à la matrice $\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}$.

III.3.e Appliquer le théorème d'encadrement pour obtenir la valeur de $\mu_2(\mathrm{A})$.

Partie IV

IV.2 Employer le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que P admet une racine réelle.

IV.3.b Se servir des égalités établies à la question IV.1 afin de déterminer les signes de a, b, c et $ab - c$.

IV.4.b Exploiter les résultats de la question IV.1 pour établir les formules demandées.

IV.4.c Utiliser les formules démontrées à la question IV.4.b.

IV.6.c Penser au lien entre μ_H et μ_2 établi à la question III.4.b puis appliquer le résultat de la question III.3.e.

IV.6.d Utiliser les résultats des questions II.4.b et IV.6.c en choisissant comme norme initiale la norme $\|\cdot\|_\mathrm{H}$, puis se servir des questions IV.6.a et IV.5 pour conclure.

Partie V

V.2 Le résultat principal de la partie IV permet d'obtenir le résultat de cette question en montrant que le polynôme P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

V.3 Utiliser la stabilité de C établie à la question V.2.

V.4.c Déduire la forme des solutions du système (S) en se basant sur les résultats des questions V.4.a et V.4.b.

V.4.d Se servir du théorème d'encadrement pour calculer les limites des composantes de $\mathrm{X}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

I. Stabilité dans des cas particuliers

I.1 On a $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ d'une part, et, d'autre part, le théorème de d'Alembert Gauss assure l'existence de z_1 et z_2 appartenant à $\mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X} - z_1)(\mathrm{X} - z_2)$$

En développant la deuxième expression, on obtient

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{X}^2 - z_1\mathrm{X} - z_2\mathrm{X} + z_1z_2 = \mathrm{X}^2 - (z_1 + z_2)\mathrm{X} + z_1z_2$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) & \text{(coefficient de degré 1)} \\ b = z_1z_2 & \text{(coefficient de degré 0)} \end{cases}$$

Ainsi, $$\boxed{a = -(z_1 + z_2) \text{ et } b = z_1z_2}$$

> On peut aussi utiliser les relations coefficients-racines en n'oubliant pas de préciser que P est unitaire. On obtient alors directement le résultat souhaité.

I.2.a On suppose ici que $\Delta > 0$ et P est stable. Alors z_1 et z_2 sont les deux racines réelles distinctes de P. Donc $\mathfrak{Re}(z_1) = z_1$ et $\mathfrak{Re}(z_2) = z_2$. Comme P est stable, on obtient $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$. D'après la question I.1, on trouve

$$\boxed{a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0}$$

I.2.b Dans cette question, $\Delta > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ par hypothèse. Comme $\Delta > 0$, z_1 et z_2 sont toujours les deux racines réelles distinctes de P. D'après la question I.1, $z_1z_2 = b > 0$, si bien que z_1 et z_2 sont de même signe. Comme $z_1 + z_2 = -a < 0$, on en déduit que z_1 et z_2 sont toutes deux strictement négatives. Ainsi,

$$\boxed{\text{P est stable.}}$$

I.3 Si $\Delta = 0$, la seule racine de P est réelle et vaut $-a/2$. Donc, si $a > 0$ et $b > 0$, on en déduit que P est stable.

Réciproquement, si P est stable, alors $-a/2 < 0$, ce qui donne $a > 0$. D'autre part, puisque $\Delta = a^2 - 4b$ est nul, on obtient $b = a^2/4 > 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{P est stable si et seulement si } a > 0 \text{ et } b > 0.}$$

I.4.a Maintenant $\Delta < 0$. Les deux racines de P sont complexes et données par les formules

$$z_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

qui font d'elles des nombres complexes conjugués, distincts, avec une partie imaginaire non nulle. Il vient

$$\boxed{z_2 = \overline{z_1}}$$

> Une autre preuve consiste à remarquer que si $z^2 + az + b$ est nul, il en est de même de son conjugué qui n'est autre que $\overline{z}^2 + a\overline{z} + b$, a et b étant réels. Ainsi, pour un polynôme à coefficients réels, le conjugué d'une racine est aussi une racine. Or, P n'a que deux racines ici : elles sont donc conjuguées.

I.4.b Posons $z_1 = \alpha + i\beta$. D'après la question I.4.a, $z_2 = \alpha - i\beta$. Supposons tout d'abord $a > 0$ et $b > 0$. D'après la question I.1, $z_1 + z_2 = 2\alpha$ et $z_1 + z_2 = -a < 0$, donc $a = -2\alpha$.

- Supposons que $a > 0$ et $b > 0$. Le fait que $a > 0$ implique $\alpha = \mathfrak{Re}(z_1) < 0$ et $\mathfrak{Re}(z_2) < 0$, si bien que P est stable.
- Réciproquement, si P est stable, puisque $\alpha = \mathfrak{Re}(z_1) < 0$, on en déduit $a > 0$. De plus, $4b > a^2$ puisque $\Delta < 0$. Ainsi $b > 0$.

Finalement, $\boxed{\text{P est stable si et seulement si } a > 0 \text{ et } b > 0.}$

I.5.a Dans cette question, on se place dans le cas où $n = 2$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{A}}(\lambda) &= \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2) \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ \chi_{\mathrm{A}}(\lambda) &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \end{aligned}$$

Or, on sait que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = a + d$ et $\det(\mathrm{A}) = ad - bc$. Ainsi,

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\lambda + \det(\mathrm{A})}$$

> On pouvait également donner directement le résultat en utilisant les trois coefficients du polynôme caractéristique au programme dans le cas de la dimension 2.

I.5.b Par définition, A est stable si et seulement si χ_{A} l'est. D'après les questions précédentes I.2, I.3 et I.4, χ_{A} est stable si et seulement si $-\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) > 0$ et $\det(\mathrm{A}) > 0$. Comme pour $n = 2$, $(-1)^n = 1$, on obtient le résultat

$$\boxed{\text{A est stable si et seulement si } \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) < 0 \text{ et } (-1)^n \det(\mathrm{A}) > 0.}$$

I.6.a On considère maintenant le cas $n = 3$. On a $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$. Une racine évidente de Q est -1, et ensuite en factorisant, on obtient

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1) = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$$

Ainsi, $\boxed{\text{Les racines complexes de Q sont } -1,\ i \text{ et } -i.}$

I.6.b Il suffit d'effectuer le calcul, et on obtient

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = -1 < 0}$$

On peut développer le déterminant de B par rapport à la première ligne :

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 = (-1)^3$$

Finalement, $\boxed{(-1)^n \det(\mathrm{B}) = 1 > 0}$

CCP Maths 2 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pauline Tan (ENS Cachan) ; il a été relu par Sylvain De Moor (ENS Cachan) et Antoine Sihrener (Professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur une large partie du programme d'analyse et, dans une moindre mesure, sur celui d'algèbre linéaire. Il introduit le produit de convolution de deux fonctions f et g continues et 2π-périodiques, défini par

$$f * g : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Il est composé de trois parties, toutes relatives à l'étude d'un opérateur de la forme $f \longmapsto f * g$ défini dans un premier temps sur l'espace E des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs réelles puis, dans la troisième partie, sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs complexes.

- Dans la première partie, la fonction g est la fonction $|\sin(\cdot/2)|$;
- Dans la deuxième, il s'agit cette fois d'une fonction un peu plus célèbre appelée noyau de Poisson et définie pour un réel r arbitraire dans $]\,0\,;1\,[$ par

$$t \longmapsto \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$$

- Enfin, dans la troisième partie, on traite le cas d'un élément g quelconque appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Dans chaque cas, on s'intéresse essentiellement aux coefficients de Fourier et à la régularité de l'image d'un élément f par l'opérateur avant de terminer par une étude du spectre de ce dernier.

La plupart des questions sont des applications très classiques du cours sur les séries de fonctions et sur l'intégration. Toutefois, ce sujet fait aussi appel à des connaissances sur les séries de Fourier, qui ne figurent plus dans le nouveau programme de PC.

Indications

Partie I

I.1.b Montrer que la dérivée de φ n'est pas continue en 0.

I.2.a Calculer les coefficients de Fourier sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$, intervalle sur lequel $\sin(t/2)$ est positif, puis utiliser une formule d'Euler pour faire apparaître des exponentielles complexes.

I.3 Utiliser la relation de Chasles.

I.4.b Appliquer le théorème de continuité sous le signe somme.

I.5.a Utiliser la question I.3, puis la formule d'addition du sinus.

I.5.b Commencer par montrer grâce au théorème fondamental de l'analyse que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$, puis montrer que sa dérivée g' est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$.

I.5.c Exprimer d'abord $c_n(f)$ en fonction de $c_n(g)$ et $c_n(g'')$, puis $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$.

I.6.b Appliquer le résultat de la question I.6.a à la fonction f, puis à la fonction f', et exploiter ensuite la linéarité de Φ.

I.6.c Remarquer que $\Phi(f)$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$, puis utiliser la question I.5.b pour établir l'injectivité de Φ.

I.7.a Utiliser la question I.5.b pour établir l'équation différentielle demandée.

Partie II

II.1.a Comparer $|p_n(t)|$ au terme général d'une série géométrique indépendante de t.

II.2.b Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente.

II.2.c Appliquer le théorème de dérivation terme à terme.

II.2.d Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente. Calculer ensuite les coefficients de Fourier des g_n, en utilisant les formules d'Euler.

II.3.a Utiliser la question II.2.d pour établir une relation entre λ et r.

II.3.b Remarquer que la fonction $\Pi(f)$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie III

III.1 Appliquer le théorème de continuité sous le signe somme.

III.2.a Effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans l'expression de $(g * f)(x)$. Appliquer ensuite le résultat de la question I.3.

III.2.b Raisonner par l'absurde et montrer que $c_n(\varepsilon) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en utilisant la fonction φ introduite à la partie I.

III.3.b Appliquer le théorème de Parseval à la fonction ψ.

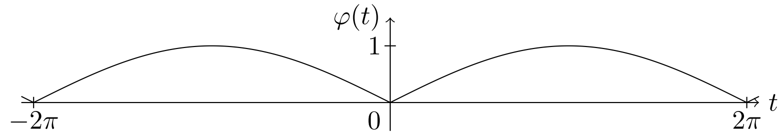
III.3.c Appliquer deux fois le théorème de Parseval.

III.3.d Démontrer séparément la double inclusion demandée.

III.3.e Remarquer que Θ est injectif implique qu'il existe une fonction f non nulle telle que $\Theta(f) = 0 = 0 \times f$.

I. Étude d'un premier opérateur

I.1.a La courbe représentative de la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$ est donnée par la figure suivante :



I.1.b En tant que composée des fonctions $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto \sin(t/2)$ continues sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Étudions la fonction φ sur chaque intervalle de la forme $]\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,[$, avec k un entier relatif. Si k est pair, alors φ coïncide sur cet intervalle avec $\sin(\cdot/2)$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,]$, de dérivée $t \longmapsto \cos(t/2)/2$. On en déduit que la restriction de la fonction φ sur $]\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,[$ est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$. Le cas où k est impair est similaire, φ coïncidant alors avec la fonction $-\sin(\cdot/2)$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux.}}$$

En revanche, ainsi que sa courbe représentative donnée à la question I.1.a le suggère, sa dérivée n'est pas continue en 0. En effet,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi'(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\cos(t/2)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \varphi'(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} -\frac{\cos(t/2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, $$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ n'est pas de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.2.a Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule d'addition du sinus assure que

$$\varphi(t+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \varphi(t)$$

On en déduit que la fonction φ est 2π-périodique. Ses coefficients de Fourier exponentiels sont donnés par

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

car le sinus est positif sur $[\,0\,;\pi\,]$. La formule d'Euler

$$\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\,\mathrm{i}}$$

valable pour tout réel t, entraîne alors

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)t}}{\mathrm{i}(1/2-n)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)t}}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right]_0^{2\pi}\\
c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)2\pi}}{\mathrm{i}(1/2-n)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)2\pi}}{\mathrm{i}(1/2+n)} - \frac{1}{\mathrm{i}(1/2-n)} - \frac{1}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)2\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)2\pi} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left(-\frac{2}{\mathrm{i}(1/2-n)} - \frac{2}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1/2-n} + \frac{1}{1/2+n}\right) \\ c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1/4-n^2} \end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(\varphi) = \dfrac{2}{\pi(1-4n^2)}}$

La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'après la question I.1.b, le théorème de convergence normale assure que

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } \varphi \text{ converge normalement vers } \varphi \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.2.b La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Dirichlet qui assure que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, la série $\sum(c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\,int} + c_{-n}(\varphi)\mathrm{e}^{-int})$ converge et que

$$\varphi(t) = c_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\,int} + c_{-n}(\varphi)\,\mathrm{e}^{-int})$$

En particulier, si $t = 0$, puisque $c_n(\varphi) = c_{-n}(\varphi) = 2/\big(\pi(1-4n^2)\big)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{4n^2-1} \text{ converge.}}$$

Sa somme est donnée par

$$\varphi(0) = c_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(c_n(\varphi) + c_{-n}(\varphi)\big) = \frac{2}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

avec $\varphi(0) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

Pour calculer la seconde somme, appliquons la formule de Parseval : la fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la série $\sum(|c_n(\varphi)|^2 + |c_{-n}(\varphi)|^2)$ converge. Puisque

$$|c_n(\varphi)|^2 = |c_{-n}(\varphi)|^2 = \frac{4}{\pi^2(1-4n^2)^2}$$

il s'ensuit que $\boxed{\text{La série } \sum \dfrac{1}{(4n^2-1)^2} \text{ converge.}}$

> Pour prouver la convergence de ces deux séries à termes positifs, on peut également utiliser la comparaison avec les séries de Riemann ; en effet,
>
> $$\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(4n^2-1)^2} \sim \frac{1}{16n^4}$$
>
> où les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/(4n^2)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/(16n^4)$ convergent car $2 > 1$ et $4 > 1$.

Pré-sujet de probabilités des Mines 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Voici le sujet que le concours des Mines propose comme « sujet 0 », et qui donne une idée du ton des futures épreuves traitant de probabilités.

Le problème porte sur la modélisation d'une queue de clients, lorsque le nombre de clients arrivant à chaque instant n suit une loi fixée. À l'aide de la *fonction caractéristique*, on établit notamment une loi « limite » pour le nombre de clients restant à servir.

- La première partie fait démontrer quelques généralités sur la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les propriétés prouvées sont des grands classiques de la théorie des probabilités qui, si elles n'apparaissent pas dans le programme, seront très probablement réintroduites dans de nombreuses épreuves.

  On montre notamment que la fonction caractéristique caractérise la loi : deux variables aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{N}$, ici) ont même loi si et seulement si elles ont même fonction caractéristique.
- Dans la deuxième partie, on montre quelques propriétés utiles sur les variables aléatoires A_n (nombre de clients arrivant entre l'instant n et l'instant $n+1$), censées toutes suivre la même loi qu'une variable A, et sur les variables aléatoires X_n (nombre de clients dans la queue).
- La troisième partie permet de montrer que, sous certaines hypothèses supplémentaires, la suite des fonctions caractéristiques des X_n converge simplement vers une fonction θ donnée.
- Enfin, dans la dernière partie, on montre que les hypothèses de la partie précédentes sont bien vérifiées lorsque la loi commune aux A_n est une certaine loi géométrique, et on identifie la « loi limite » de la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'épreuve est d'une longueur très raisonnable et de nombreuses questions sont des applications assez directes du cours de probabilités du nouveau programme ; les principales difficultés sont finalement plutôt du domaine de l'analyse, les techniques de sommation et de majoration devant être correctement maîtrisées.

Indications

Partie 1

1 Écrire $\phi_{\mathrm{X}}(t)$ sous la forme de la somme d'une série en utilisant la formule de transfert. Invoquer ensuite le théorème de continuité pour les séries de fonctions.

2 Montrer que, pour tout entier k, $\mathrm{I}_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ et en déduire que X et Y ont la même loi.

3 Utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

4 L'énoncé présente une légère coquille, la variable intéressante est $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - 1$, et non $\mathrm{Y} + 1$.

5 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

Partie 2

6 Si $\mathrm{M} > 0$, choisir un réel $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{M}$, et montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n > \mathrm{M}) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{A} > \mathrm{N}) > 0$.

7 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

8 Remarquer que X_n est une fonction de $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ pour $n \geqslant 1$.

Partie 3

10 Partir de la décomposition $1 = \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n > 0)} + \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n = 0)}$, multiplier par $\mathrm{e}^{\,it\mathrm{X}_{n+1}}$ puis passer aux espérances.

13 Forcer l'apparition de $\phi_{\mathrm{X}_n}(t) - \theta(t)$; le préfacteur est, en module, égal à $\phi_{\mathrm{A}}(t)$ que l'on pourra donc identifier à β_t. Après application de l'inégalité triangulaire, il reste un terme qui doit tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, et qui devient donc « epsilonesque » pour n suffisamment grand.

14 La propriété est évidente lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire, montrer que si $\beta \in \left]\,0\,;1\,\right[$, alors toute suite positive vérifiant « pour tout ε, il existe un entier à partir duquel $v_{n+1} \leqslant \beta v_n + \varepsilon$ » converge vers 0.

Partie 4

15 Exprimer ϕ_{A} sous la forme d'une série trigonométrique puis utiliser la question 2.

16 Ne pas oublier de montrer que A est à valeurs dans $\mathbb{N}$, que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \geqslant n) > 0$ pour tout entier n, que $\left|\phi_{\mathrm{A}}(t)\right| < 1$ pour tout $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et que $\mathrm{E}[\mathrm{A}] = \rho \in \left]\,0\,;1\,\right[$.

17 L'énoncé ne le précise pas, mais la variable Y est une variable dont la fonction caractéristique est θ.

1. Fonction caractéristique

1 La formule de transfert permet d'expliciter l'espérance de e^{itX}, qui existe bien puisque e^{itX} est bornée en module par 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, e^{int}$$

où l'on a noté $p_n = P(X = n)$ pour tout entier n. Définissons la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n : t \mapsto p_n\, e^{int}$. Chaque fonction u_n est continue, bornée et $\|u_n\|_\infty = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement et, en particulier, elle converge uniformément. Un théorème du cours assure alors que sa somme est continue. En conclusion,

$$\boxed{\phi_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

> Lorsqu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et a pour somme une fonction F, alors certaines propriétés sont conservées par passage à la limite simple, comme la périodicité, la croissance, la convexité (en filière MP)... et d'une manière générale toutes les propriétés qui ne demandent qu'à comparer des valeurs de F en un nombre fini de points (propriétés *ponctuelles*).
> En revanche, la continuité des u_n et la convergence simple n'assurent pas en général la continuité de F : on doit montrer que la série converge uniformément (par exemple parce qu'elle converge normalement), au moins localement, c'est-à-dire sur tout segment de l'intervalle de définition.

Enfin, chaque u_n est une fonction 2π-périodique ; notamment, puisque toutes les séries convergent, on a pour tout réel t :

$$\phi_X(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \phi_X(t)$$

donc $$\boxed{\phi_X \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

> Puisque ϕ_X est continue et 2π-périodique, on en déduit qu'elle est bornée. Cependant, il est aisé de montrer ce résultat directement : grâce à la convergence absolue de la série de fonctions, on a
>
> $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|\phi_X(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left|p_n\, e^{int}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$
>
> Ce résultat reste d'ailleurs vrai lorsque X est une variable aléatoire quelconque (pas forcément à valeurs dans $\mathbb{N}$).

2 Soit k un entier naturel. En écrivant

$$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, e^{int}$$

on obtient $$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(X = n)\, e^{i(n-k)t}}_{=v_n(t)}\, dt$$

Puisque $\|v_n\|_\infty = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série numérique $\sum \|v_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, et donc uniformément. Ainsi, on peut intégrer terme à terme dans l'égalité précédente :

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t$$

Or, un résultat extrêmement classique est le suivant :

$$\forall\, p, q \in \mathbb{Z} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si $p = q$, on intègre la fonction constante égale à 1, et si $p \neq q$, on sait calculer une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}$, qui est $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}/\mathrm{i}(p-q)$ et est donc 2π-périodique. En conclusion, on a donc montré que

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)\ \delta_{n,k} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc déduit la loi de X de la connaissance de sa fonction caractéristique. Notamment, si X et Y ont même fonction caractéristique, alors pour tout entier naturel k, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{Y}}(t)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

$$\boxed{\text{Deux variables aléatoires à valeurs dans } \mathbb{N} \text{ ayant même fonction caractéristique ont même loi.}}$$

> Le but de cette question est de montrer que *la fonction caractéristique caractérise la loi*, c'est-à-dire que la connaissance de ϕ_{X} suffit (du moins du point de vue théorique) à déterminer entièrement la loi de X. Notamment, deux variables aléatoires ayant même fonction caractéristique ont même loi. La démonstration générale de cette propriété est assez délicate ; s'agissant de lois discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est beaucoup plus facile.

3 On suppose que « $\mathrm{E}[\mathrm{X}] < +\infty$ », c'est-à-dire que X admet une espérance. On rappelle que l'on a noté, dans la question 1, $u_n : t \mapsto p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On peut alors montrer que ϕ_{X} est de classe $\mathscr{C}^1$ en prouvant la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum u_n'$. Puisque

$$u_n' : t \longmapsto \mathrm{i}n\,p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$$

on a donc $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n'\|_\infty = n\,p_n$

Or, dire que X admet une espérance, c'est précisément dire que la série $\sum n\,p_n$ converge. Ainsi, $\sum u_n'$ converge normalement, et donc uniformément. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions assure que

$$\boxed{\phi_{\mathrm{X}} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1}$$

et que, de plus $\qquad \phi_{\mathrm{X}}' : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n\,p_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$

Notamment, $\qquad \boxed{\phi_{\mathrm{X}}'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n\,p_n = \mathrm{i}\,\mathrm{E}[\mathrm{X}]}$

Mines Maths 1 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par François Lê (ENS Lyon) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie (au moins 2) qui peuvent s'écrire comme une somme finie de projecteurs. Plus précisément, on montre que ce sont les endomorphismes à trace entière et supérieure à leur rang.

- La première partie demande de retrouver des résultats de cours sur les projecteurs et la trace. En particulier, le but de la question 4 est de montrer que trace et rang d'un projecteur sont égaux. La partie se termine par la preuve que si un endomorphisme est une somme de projecteurs, alors sa trace est entière et supérieure à son rang.
- Dans la courte deuxième partie, on étudie la matrice d'un endomorphisme quelconque dans une base particulière associée à un projecteur de rang 1.
- La troisième partie est plus technique. On y prouve que si un endomorphisme T n'est pas une homothétie et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des réels dont la somme est égale à la trace de T, il existe une base dans laquelle la matrice de T a pour éléments diagonaux les réels $t_1, \ldots, t_n$.
- Enfin, la quatrième partie s'attache à montrer que si un endomorphisme est à trace entière et supérieure à son rang, c'est une somme finie de projecteurs. On utilise notamment les résultats de la troisième partie.

Le sujet mélange des questions de cours (numéros 1, 2, 3 et 5) et des questions « classiques » (numéros 4, 11 et 13). Il faut rester vigilant et bien rédiger le tout.

Remarquons que les notations utilisées dans le sujet sont inhabituelles : N(T) pour le noyau d'un endomorphisme T, R(T) pour son image, $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ pour sa matrice dans une base $\mathscr{B}$. Elles peuvent déstabiliser, mais le correcteur s'attend à ce que vous les employiez.

Indications

Partie 1

4 Utiliser une base de X adaptée à la décomposition obtenue à la question 3 et chercher la matrice de P dans cette base.

6 Chercher une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ à partir d'une base de F et d'une base de G.

7 Pour l'inégalité $\mathrm{Tr}\ \mathrm{S} \geqslant \mathrm{rg}\ \mathrm{S}$, commencer par montrer, grâce au résultat de la question 6, que si U et V sont des endomorphismes de X, alors $\mathrm{rg}\,(\mathrm{U}+\mathrm{V}) \leqslant \mathrm{rg}\ \mathrm{U}+\mathrm{rg}\ \mathrm{V}$. Procéder ensuite par récurrence sur m en écrivant, pour l'étape d'hérédité,

$$\mathrm{S} = (\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_{m-1}) + \mathrm{P}_m$$

afin d'appliquer à S l'inégalité sur le rang d'une somme.

Partie 2

8 Travailler matriciellement dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$.

10 Montrer la contraposée en calculant la matrice de $\mathrm{P}'\mathrm{T}\mathrm{P}'$ dans la base $\mathscr{C}$ obtenue à la question 9.

Partie 3

11 Raisonner par l'absurde en supposant que pour tout $x \in \mathrm{X}$, la famille $(x, \mathrm{T}x)$ est liée. Commencer par montrer que cela implique que pour tout x, $\mathrm{T}x$ est proportionnel à x. Démontrer ensuite que les coefficients de proportionnalité ainsi introduits sont tous égaux.

13 Procéder par récurrence sur n en utilisant la question 12 lors de l'hérédité.

14 Choisir une base $\mathscr{B}$ construite comme à la question 12 pour l'endomorphisme T et considérer les endomorphismes U et T′ définis par $\mathbb{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{Diag}(t_1, t_2)$ et $\mathrm{T}' = \mathrm{T}-\mathrm{U}$. Appliquer ensuite le résultat de la question 13 à T′.

16 Bien que l'énoncé laisse entendre que la récurrence est à initialiser à $n = 3$, on peut avantageusement la faire commencer à $n = 2$, ce cas étant celui traité à la question 14.

Partie 4

18 Commencer par trouver des entiers (positifs) $t_1, \ldots, t_\rho$ de somme Tr T afin de pouvoir appliquer les résultats des questions 14 et 16 à l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la question 17 est $\mathbb{T}_1$. Le fait de choisir des t_i positifs sera utile pour la question suivante.

19 Décomposer la matrice obtenue à la question 18 en une somme de matrices de projecteurs. On pourra avantageusement interpréter chacun des t_i comme la somme $1 + \cdots + 1$ (t_i fois).

20 Se ramener au cas précédent en retranchant à T le projecteur dont la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ construite à la question 18 est $\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

> Signalons que l'utilisation par l'énoncé d'accolades pour désigner des familles de vecteurs est sujette à discussion, puisque de telles familles ne sont pas des ensembles. Pour cette raison, nous utiliserons dans ce corrigé des parenthèses en lieu et place des accolades de l'énoncé.

1. Traces et projecteurs

1 Notons $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour calculer la trace de $\mathbb{AB}$ et celle de $\mathbb{BA}$, commençons par calculer leurs éléments diagonaux. Avec la formule donnant les termes d'une matrice produit, on a, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$(\mathbb{AB})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \qquad \text{et} \qquad (\mathbb{BA})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

Par conséquent, $$\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

Cette somme double étant finie, on peut intervertir l'ordre de sommation, de sorte que

$$\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{BA})_{kk}$$

soit $$\boxed{\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{BA})}$$

2 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de X et $\mathbb{Q} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: on sait que $\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}\mathbb{Q}^{-1}$. En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) &= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}\mathbb{Q}^{-1}) \\
&= \operatorname{Tr}((\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})\mathbb{Q}^{-1}) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}^{-1}(\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}) \\
\operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) &= \operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})
\end{aligned}$$

Ainsi, $$\boxed{\text{La trace de } \mathbb{T}_{\mathscr{B}} \text{ est indépendante de la base } \mathscr{B}.}$$

> On prendra garde à ne pas faire dire au résultat de la question 1 ce qu'il ne dit pas : de façon générale, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont trois matrices, alors $\operatorname{Tr}(\mathbb{ABC})$ prend des valeurs différentes par permutation de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$: par exemple, $\operatorname{Tr}(\mathbb{ABC}) \neq \operatorname{Tr}(\mathbb{ACB})$ en général. Il faut donc bien grouper les matrices avant d'utiliser la propriété $\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{BA})$.

3 On peut par exemple montrer que $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} = \{0\}$ et vérifier que l'égalité de dimensions $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{R(P)} + \dim \mathrm{N(P)}$ est vraie.

- Soit $x \in \mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)}$. Comme $x \in \mathrm{R(P)}$, il existe $\xi \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}(\xi)$. Alors, puisque $x \in \mathrm{N(P)}$, on a $\mathrm{P}(x) = 0 = \mathrm{P}^2(\xi)$. Or, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ car P est un projecteur : ainsi, $0 = \mathrm{P}^2(\xi) = \mathrm{P}(\xi)$, d'où $x = 0$. Cela montre que $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} \subset \{0\}$. Réciproquement, on a bien $0 \in \mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)}$. Ainsi, $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} = \{0\}$.

- D'après la formule du rang, $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{N}(\mathrm{P}) + \mathrm{rg}\ \mathrm{P} = \dim \mathrm{N}(\mathrm{P}) + \dim \mathrm{R}(\mathrm{P})$.

En conclusion, $$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})}$$

> Une autre façon de faire est de montrer que $\mathrm{R}(\mathrm{P}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \{0\}$ et que $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) + \mathrm{N}(\mathrm{P})$. Pour cette dernière égalité, il est aisé de vérifier que si $x \in \mathrm{X}$, il se décompose selon cette somme en $x = \mathrm{P}(x) + (x - \mathrm{P}(x))$. En effet, $\mathrm{P}(x) \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$ par définition de l'image de P et $x - \mathrm{P}(x) \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$ car $\mathrm{P}(x - \mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}^2(x) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x) = 0$.

4 Déterminons la matrice de P dans une base adaptée à la décomposition en somme directe obtenue à la question précédente afin de calculer la trace de P.

Soient $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de R(P) et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de N(P). La famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de X car $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$. Pour trouver la matrice de P dans cette base, décomposons sur celle-ci chacun des vecteurs $\mathrm{P}(e_i)$, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. Si $i \in [\![r+1\,;n]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$ et il vient immédiatement $\mathrm{P}(e_i) = 0$. Si maintenant $i \in [\![1\,;r]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$: il existe f_i appartenant à X tel que $e_i = \mathrm{P}(f_i)$. Dans ce cas, $\mathrm{P}(e_i) = \mathrm{P}^2(f_i) = \mathrm{P}(f_i)$ puisque P est un projecteur. Ainsi, $\mathrm{P}(e_i) = e_i$ lorsque $i \in [\![1\,;r]\!]$. La matrice de P dans la base $\mathscr{B}$ est donc la suivante :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \mathrm{P}(e_1) & & & \mathrm{P}(e_r) & \mathrm{P}(e_{r+1}) & & & \mathrm{P}(e_n) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{array}
= \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$$

D'après la question 2, la trace de P est égale à la trace de la matrice précédente, donc $\mathrm{Tr}\ \mathrm{P} = \mathrm{Tr}\ \mathbb{I}_r = r$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ \mathrm{P} = \mathrm{rg}\ \mathrm{P}}$$

5 Traitons d'abord la première égalité proposée, en procédant par double inclusion. Soit d'abord $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P}')$: il existe $\xi \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}'(\xi)$. En se souvenant que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$, on obtient

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{P}'(\xi)) = \mathrm{P}(\xi - \mathrm{P}(\xi)) = \mathrm{P}(\xi) - \mathrm{P}(\xi) = 0$$

Ainsi, $x \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$ pour tout $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P}')$, ce qui signifie que $\mathrm{R}(\mathrm{P}') \subset \mathrm{N}(\mathrm{P})$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$. Par définition même de P′, on a $\mathrm{P}'(x) = x - \mathrm{P}(x)$. Or $\mathrm{P}(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = \mathrm{P}'(x)$. Par conséquent $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P}')$ pour tout $x \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$. Autrement dit, $\mathrm{N}(\mathrm{P}) \subset \mathrm{R}(\mathrm{P}')$ et finalement

$$\boxed{\mathrm{R}(\mathrm{P}') = \mathrm{N}(\mathrm{P})}$$

Mines Maths 2 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Liboz (Professeur en CPGE) ; il a été relu par François Lê (ENS Lyon) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Cette épreuve est consacrée à l'étude de l'opérateur de moyenne qui, à une fonction continue f, associe la fonction $\mathrm{A}_\omega(f)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{A}_\omega(f)(x) = \frac{1}{\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

où ω est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

- La première partie étudie les propriétés de base de l'opérateur de moyenne : on montre que c'est un endomorphisme injectif de $\mathscr{C}_b^0$ et on étudie ses valeurs propres à l'aide d'une équation différentielle.
- La seconde partie, plus calculatoire, s'intéresse à la limite de $\mathrm{A}_\omega(f)$ en l'infini dans le cas où les fonctions f et ω sont périodiques. Elle est divisée en deux sous-parties.
  - À l'aide notamment de la fonction partie entière et grâce à des majorations d'intégrales, on détermine la limite en $\pm\infty$ de $\mathrm{A}_\omega(f)$ quand les périodes respectives T et τ de f et ω sont telles que $\tau/\mathrm{T} \in \mathbb{Q}$.
  - Dans le cas où ce quotient est irrationnel, le sujet fait appel à la théorie des séries de Fourier pour les fonctions périodiques afin d'étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $\mathrm{A}_\omega(f)$.

Les notions fondamentales de l'analyse sont abordées : continuité, dérivation et intégration ainsi que la théorie des équations différentielles à coefficients non constants. La partie 1 et la première sous-partie de la partie 2 constituent ainsi un très bon entraînement, d'autant qu'elles sont l'occasion de mettre en œuvre des techniques de calcul très classiques. Seule la question 17 n'est pas faisable avec le nouveau programme de la filière PC.

Indications

Partie I

1 Pour le calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$, on peut écrire la fonction φ_ω comme un quotient de taux d'accroissement de primitives de certaines fonctions.

2 Pour montrer que A_ω est un endomorphisme de $\mathscr{C}_b^0$, majorer la quantité $|\varphi_\omega(x)|$ à l'aide de $\|f\|$.

3 Dériver l'égalité $\mathrm{A}_\omega(f) = 0$.

4 Dériver l'égalité $\mathrm{A}_\omega(u) = \lambda u$ après avoir chassé le dénominateur.

5 Se ramener, en discutant suivant les valeurs de λ, à une équation différentielle de la forme $u'(x) = a(x)u(x)$ dont la solution générale est connue.

6 Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$. On pourra distinguer deux cas selon que ω est intégrable ou non sur $\mathbb{R}$ afin d'obtenir une solution dans $\mathscr{C}_b^0$.

Partie II

7 Écrire l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la période τ de ω.

11 Pour $k \neq 0$, remplacer $\mathrm{E}_\theta(x)$ par sa valeur quand $x \in [\,k\theta\,;(k+1)\theta\,[$.
La formule donnée par l'énoncé sur l'intervalle $[\,0\,;\theta\,[$ est fausse, chercher plutôt à montrer que $\mathrm{A}_\omega(f) \circ \mathrm{E}_\theta(x) = f(0)$ pour $x \in [\,0\,;\theta\,[$.

12 Majorer $x - \mathrm{E}_\theta(x)$ indépendamment de x.

13 Découper la différence en deux parties en additionnant puis en soustrayant le terme

$$\frac{1}{\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t}\int_0^{\mathrm{E}_\theta(x)} f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et utiliser les questions 8 et 12.

14 Conclure en utilisant les questions 11 et 13.

15 Se ramener à un ensemble où m varie dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ ou construire explicitement ce minimum à l'aide de la partie entière.

16 Écrire cet ensemble comme une union finie d'ensembles étudiés à la question 15.

17 [HP] Pour f une fonction T-périodique, on définit ses coefficients de Fourier, par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-2i\pi nt/\mathrm{T}}\,\mathrm{d}t$$

On peut alors définir la série de Fourier de f par, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{S}_n(f) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(c_n(f)e^{2i\pi nt/\mathrm{T}} + c_{-n}(f)e^{-2i\pi nt/\mathrm{T}}\right)$$

Le théorème de Dirichlet affirme que si f est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux alors la série de fonctions $(\mathrm{S}_n)_n$ converge simplement vers f. On peut ici utiliser ce dernier pour écrire $\omega(t)$ comme la somme de sa série de Fourier.

18 Réduire la différence en calculant explicitement $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} p(t)\,\mathrm{d}t$ puis utiliser les résultats des questions 16 et 17.

19 Découper la différence $\mathrm{A}_\omega(f)(x) - \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$ en trois parties en introduisant le polynôme trigonométrique p et majorer chacune d'elles.

I. L'opérateur de moyenne

> La fonction ω étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives. Dans tout le corrigé, on note donc Ω la primitive de ω qui s'annule en 0. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
> $$\Omega(x) = \int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t$$
> et la formule donnée dans l'énoncé devient, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
> $$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Par le même argument que dans la remarque précédente, la primitive F de $f\omega$ qui s'annule en 0 vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, comme ω est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction Ω est strictement croissante. Sachant que $\Omega(0) = 0$, on en déduit que Ω ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$: elle est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le quotient $\varphi_\omega(x) = \mathrm{F}(x)/\Omega(x)$ définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. En outre, pour $x \neq 0$,

$$\varphi_\omega(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x} \times \frac{x}{\Omega(x)}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$ existe et vaut $\mathrm{F}'(0)/\Omega'(0)$, soit

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x) = f(0)}$$

Ainsi, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_\omega \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \text{ et se prolonge continûment à } \mathbb{R}.}$$

2 L'application A_ω associe à une fonction f de $\mathscr{C}^0$ la fonction φ_ω correspondante. D'après la question 1, φ_ω est aussi dans $\mathscr{C}^0$. De plus, A_ω est linéaire, grâce à la linéarité de l'intégrale, de sorte que

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{A}_\omega \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}^0.}$$

Si f est une fonction de $\mathscr{C}_b^0$ alors $\|f\|$ est bien définie et pour tout $x > 0$, sachant que Ω est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$|\varphi_\omega(x)| = \left|\frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\Omega(x)} \left|\int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

On peut maintenant utiliser l'inégalité triangulaire et il vient

$$\begin{aligned}
|\varphi_\omega(x)| &\leqslant \frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x |f(t)|\,\omega(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x \|f\|\omega(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car l'intégrale conserve l'ordre} \\
&= \frac{1}{\Omega(x)}\|f\|\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t \\
|\varphi_\omega(x)| &\leqslant \|f\|
\end{aligned}$$

Cette inégalité est aussi vérifiée si $x = 0$ et le cas $x < 0$ se traite d'une manière similaire, en pensant bien à inverser dans ce cas le sens des bornes de l'intégration et en considérant que $\Omega(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. On a donc montré que φ_ω est aussi bornée et que

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{A}_\omega \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}_b^0.}$$

3 Pour montrer que l'endomorphisme A_ω est injectif, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit f un élément de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}_\omega$. Alors $\mathrm{A}_\omega(f) = \varphi_\omega = 0$, ce qui entraîne que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par continuité de $f \cdot \omega$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. En dérivant la dernière égalité, on obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x)\omega(x) = 0$$

Puisque ω est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. Ainsi

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \mathrm{A}_\omega \text{ est injectif.}}$$

4 Soient λ une valeur propre de A_ω et u un vecteur propre associé. La fonction u est donc continue, bornée et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. De plus, elle vérifie la relation suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\lambda u(x) = \mathrm{A}_\omega(u)(x) = \frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x u(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

Par continuité de u et ω, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\Omega(x)}\displaystyle\int_0^x u(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable. Multiplions l'égalité $\mathrm{A}_\omega(u)(x) = \lambda u(x)$ par $\Omega(x)$, on obtient alors

$$\int_0^x u(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \lambda u(x)\Omega(x)$$

Dérivons ensuite cette relation pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad u(x)\omega(x) = \lambda u'(x)\Omega(x) + \lambda u(x)\omega(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation différentielle satisfaite par la restriction à } \mathbb{R}_+^* \text{ d'un} \\ \text{vecteur propre } u \text{ pour la valeur } \lambda \text{ de } \mathrm{A}_\omega \text{ est donnée par} \\ \qquad \left(\lambda\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t\right) u'(x) = (1-\lambda)\,\omega(x)\,u(x) \qquad \text{(E)}\end{array}}$$

Centrale Maths 1 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Ce sujet est consacré au calcul différentiel. Il propose d'établir des liens entre la matrice jacobienne d'une fonction d'une part, et l'expression de cette fonction ou certaines de ses propriétés d'autre part. Le sujet est composé de quatre parties.

- La première partie introduit le jacobien de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{A}x + b$ où la variable x et b sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée réelle de taille n. Des calculs classiques mais fondamentaux sont demandés ; ils sont réutilisés dans chacune des parties suivantes.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à des propriétés vérifiées par les solutions du problème de Cauchy $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, $\mathrm{X}(0) = a$ avec A une matrice carrée réelle de taille 2 et $a \in \mathbb{R}^2$. On étudie successivement les cas d'une matrice A diagonale, puis triangulaire, puis quelconque.
- La troisième partie fournit une caractérisation d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^n$ est antisymétrique. On fait ensuite de même pour une matrice symétrique.
- Dans la quatrième partie, on montre une caractérisation d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice jacobienne est orthogonale en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Le sujet est intéressant et permet d'aborder des techniques de calcul différentiel pas toujours bien maîtrisées. Sa progression n'est guère graduelle : les deux premières parties sont tout à fait accessibles tandis que les deux dernières sont beaucoup plus techniques. Comme souvent, investir deux minutes au début de l'épreuve pour parcourir et évaluer l'énoncé permettait d'optimiser la gestion du temps : il fallait ici traiter rapidement les parties 1 et 2 afin de réserver l'essentiel du temps aux parties 3 et 4, a priori plus rémunératrices.

Indications

Partie I

I.B.1 Interpréter φ comme une composée de fonctions.

I.B.2 Utiliser le théorème de Taylor-Young.

I.C.1 En remarquant que $t_j = te_j$ avec e_j le j^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, établir l'égalité $f(t_j) = t\mathrm{D}_j f(0) + t\varepsilon_j(t)$ avec ε_j une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en zéro. Conclure par multilinéarité et en utilisant la continuité de la fonction Φ fournie par l'énoncé.

Partie II

II.C.1 Utiliser le fait que $\mathrm{e}^{xy} = (\mathrm{e}^{x})^y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II.D.1 Pour la résolution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, commencer par déterminer la solution de l'équation en la deuxième coordonnée puis injecter la solution dans la première équation pour en faire une équation avec second membre.

II.D.2 Montrer que pour A et B matrices réelles semblables, la relation souhaitée est vérifiée pour A si et seulement si elle l'est pour B. Conclure à l'aide des cas particuliers précédents.

II.D.3 Observer que le seul cas non couvert par l'étude précédente est celui d'une matrice admettant deux valeurs propres complexes conjuguées et donc distinctes. Puis remarquer que les calculs de la question II.D.2 se déroulent à l'identique dans $\mathbb{C}$.

Partie III

III.B.2 Utiliser successivement les relations des questions III.A et III.B.1.

III.B.3 Utiliser la caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe de R^n puis considérer la fonction $h(x) = f(x) - \mathrm{A}x$ avec A une matrice bien choisie.

III.B.4 La question III.B.3 fournit une condition nécessaire, étudier si cette condition est suffisante.

III.C En supposant $\mathrm{J}_f(x)$ symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, introduire la fonction g suggérée par l'énoncé. Vérifier les hypothèses de dérivation sous l'intégrale à l'aide d'une domination locale puis calculer $\mathrm{D}_j g$ pour $j \in [\![1\,;\, n]\!]$ et procéder à une intégration par parties.

Partie IV

IV.A.1 Remarquer que les vecteurs colonnes de $\mathrm{J}_f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ puis procéder par dérivation.

IV.A.2 Utiliser successivement les résultats de la question IV.A.1 en procédant comme à la question III.B.2.

IV.A.3 Reconnaître le produit matriciel ${}^t\mathrm{J}_f(x)\,\mathrm{X}$ dans la relation précédente en posant X matrice colonne dont la p^{e} ligne contient $\big(\partial^2 f_p/(\partial x_j \partial x_k)\big)(x)$. Puis utiliser le résultat de la question III.B.3.

IV.B La question IV.A.3 fournit une condition nécessaire, étudier si cette condition est suffisante.

IV.C Si $\mathrm{J}_f(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, utiliser les résultats établis au cours de la question IV.A.3 et procéder à des changements dans l'ordre de sommation de l'expression de $\Delta_{g \circ f}$. Pour la réciproque, étudier le cas où $g(x) = x_p$ avec $p \in [\![1 \,;\, n]\!]$ puis $g(x) = x_p x_q$ avec $(p, q) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$.

I. Une interprétation du jacobien

I.A Notons $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$. Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + b_i$$

Ainsi, les fonctions coordonnées f_i sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Par dérivation, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad \mathrm{D}_j f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{i,j}$$

Par suite $\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{J}_f(x) = \mathrm{A}}$

I.B.1 Soit $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et posons

$$\forall t \in \mathbb{R}^n \qquad \psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)) = (ta_1,\ldots,ta_n)$$

La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque chacune de ses fonctions coordonnées ψ_i l'est. Comme $\varphi = g\circ\psi$, on en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, il vient

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(\psi(t))$$

On conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(ta) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{D}_i g(ta)}$$

I.B.2 D'après le théorème de Taylor-Young, comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle admet en particulier un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \mathrm{o}(t)$$

Avec le résultat établi à la question précédente, il s'ensuit au voisinage de zéro

$$\boxed{g(ta) = g(0) + t\,(a_1\mathrm{D}_1 g(0) + \ldots + a_n \mathrm{D}_n g(0)) + \mathrm{o}(t)}$$

I.C.1 Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. En utilisant le résultat établi ci-avant, on trouve au voisinage de zéro

$$\begin{aligned} f(t_i) &= f(0,\ldots,0,t,0,\ldots,0) \qquad\qquad (\mathbf{1})\\ &= f(0) + t(0\times \mathrm{D}_1 f(0) + \ldots + 1\times \mathrm{D}_i f(0) + \ldots + 0 \times \mathrm{D}_n f(0)) + \mathrm{o}(t)\\ f(t_i) &= t\mathrm{D}_i f(0) + \mathrm{o}(t) \end{aligned}$$

Pour t réel, posons $\qquad \varepsilon_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\,[f(t_i) - t\mathrm{D}_i f(0)] & \text{si } t \neq 0\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

La fonction ε_i est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Puis d'après l'égalité ($\mathbf{1}$), on a

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{t}\mathrm{o}(t) = \mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = \varepsilon_i(0)$$

Centrale Maths 2 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gauthier Gidel (ENS Ulm) ; il a été relu par Yvon Vigaud (Professeur en CPGE) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude des sommes de carrés dans un anneau commutatif A quelconque. Étant donné un entier p non nul, on cherche à établir des formules assurant la stabilité par produit de l'ensemble $\mathrm{C}_p(\mathrm{A})$ des éléments somme de p carrés dans A. Ces formules sont essentielles pour répondre à des questions classiques d'arithmétique comme « quels entiers naturels sont somme de deux carrés ? »

Il utilise de nombreuses parties du programme d'algèbre, principalement les symétries vectorielles, la réduction des endomorphismes et les applications bilinéaires. Mais ce sujet fait aussi appel à des connaissances en arithmétique, en programmation et à des idées classiques analogues à celles utilisées sur les nombres complexes et les entiers de Gauss. L'énoncé comporte cinq parties dont une entièrement consacrée à l'algorithmique.

- La première partie concerne l'étude des symétries et des familles de symétries anticommutant deux à deux.
- La deuxième partie permet d'introduire les quaternions et d'en démontrer certaines propriétés.
- Dans la troisième partie, on réutilise les deux parties précédentes pour l'étude des applications bilinéaires conservant la norme. Il en résulte un théorème dû à Hurwitz qui stipule que les formules recherchées n'existent pas pour $p = 3$.
- La quatrième partie est consacrée à la programmation d'algorithmes pouvant permettre la vérification pratique des résultats démontrés.
- La cinquième partie conclut ce sujet par une preuve du célèbre théorème des quatre carrés. En utilisant les propriétés arithmétiques des quaternions à coordonnées entières et en utilisant les résultats de la partie III, on démontre que tout entier naturel est la somme de quatre carrés d'entiers.

Ce problème est long et comporte des questions difficiles. En particulier la question V.A où l'énoncé conseille même de traiter un cas particulier. Il est extrêmement compliqué de traiter ce sujet en quatre heures. Néanmoins, il recouvre une partie conséquente du programme d'algèbre et permet au passage de se familiariser sur les quaternions.

Indications

Partie I

I.A.1.c Ne pas oublier que les espaces peuvent être triviaux.

I.A.2.b Remarquer que si u est un endormorphisme de E et F un sous espace vectoriel de E alors

$$\dim\big(u(\mathrm{F})\big) \leqslant \dim(\mathrm{F})$$

I.C.1 Montrer qu'un *H-système* est libre.

I.C.3 Penser à utiliser I.B.1.

I.D.1.a Penser à utiliser I.B.1.

I.D.1.b Utiliser le fait que U et S_j anticommutent.

I.D.1.c Majorer p grâce à la définition d'un *H-système* et que $\dim(\mathrm{E}_0) = \dfrac{n}{2}$.

I.D.2 Montrer le résultat par récurrence.

I.E.1 Effectuer des calculs par blocs.

I.E.2 Montrer le résultat par récurrence.

I.E.3 Utiliser le processus de la question I.E.1.

Partie II

II.A.1.a Ne pas oublier que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

II.A.2 Penser aux matrices $\mathrm{M}(\mathrm{i}, 0)$ et $\mathrm{M}(0, 1)$.

II.A.3.b Utiliser le tableau de la question précédente.

II.B.1.b et c Voir la transformation * comme la composée de la transposition et du passage au conjugué des coefficients et remarquer que ces deux endomorphismes commutent.

II.B.1.d Écrire $\mathrm{N}(qr)e = qr(qr)^*$ et utiliser la question II.B.1.b.

II.B.2.a Utiliser la linéarité de la trace.

II.B.2.b Remarquer que $q = y\mathrm{I} + z\mathrm{J} + t\mathrm{K} \Longleftrightarrow q^* = -q$.

II.B.2.c Appliquer la question précédente à un q et r bien choisis puis écrire

$$\mathrm{N}(ac - d^*b)e = (ac - d^*b)(ac - d^*b)^*$$

Partie III

III.A.1 Utiliser pour tous quaternions q et r l'égalité $\mathrm{N}(qr) = \mathrm{N}(q)\mathrm{N}(r)$.

III.A.2 Se servir de la question II.B.2.b en remarquant que pour $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$,

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2 = \mathrm{N}(a) + \mathrm{N}(b)$$

III.B.1.a Utiliser la linéarité du produit scalaire et de u_i.

III.B.1.b Appliquer l'identité précédente avec Y un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B.1.c Penser à la relation

$$(a|b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2}{2}$$

III.B.1.a Utiliser le fait que A_n et A_i anticommutent.

III.B.3 Discuter selon que $m = 1$ ou que $m \geqslant 3$ et se ramener à l'étude de

$$3 \times 2^{d-1} \leqslant d + 1$$

Partie IV

IV.A Utiliser une boucle while.

IV.D Réutiliser les fonctions écrites pour les question IV.A et IV.C.

Partie V

V.A Constater que les applications bilinéaires et les relations associées de la partie III peuvent s'écrire dans un anneau A.

V.B.1.b Remarquer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que

$$|x - n| \leqslant \frac{1}{2}$$

V.B.1.c Traiter le cas d'égalité de la question précédente.

V.B.2.a Se ramener à

$$p\mathbb{Z} \cap \{0, \ldots, p-1\} = \{0\}$$

V.B.2.b Utiliser le lemme des tiroirs et l'injectivité de ϕ ou alors raisonner sur les cardinaux.

V.B.3.a Faire une disjonction de cas et utiliser l'indication sur des paires d'entiers impairs (dont la somme est toujours paire).

V.B.3.b Effectuer la division euclidienne de x, y, z et t par m.

V.B.3.c Utiliser le fait que $\mathrm{N}(qr) = \mathrm{N}(q)\mathrm{N}(r)$.

I. Symétries vectorielles

I.A.1.a Soit x appartenant à F_s. Alors puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, il existe un unique couple (y, z) appartenant à $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = y + z$. Ainsi,

$$s(x) = s(y+z) = y - z \qquad (s \text{ est une symétrie})$$

de plus,
$$s(x) = x = y + z \qquad (x \in \mathrm{F}_s)$$

d'où,
$$z = 0 \quad \text{et ainsi} \quad x = y$$

donc $x \in \mathrm{F}$. Si bien que $\mathrm{F}_s \subset \mathrm{F}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{F}$. Alors en appliquant la définition de s avec $z = 0 \in \mathrm{G}$, il vient

$$s(x) = x \quad \text{et donc} \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_s$$

Finalement par double inclusion $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{F}_s}$

Faisons de même pour G et G_s, Soit $x \in \mathrm{G}_s$. Alors il existe un unique couple (y, z) appartenant à $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = y + z$. Ainsi, il vient

$$y + z = x = -s(x) = -s(y+z) = -y + z$$

Ainsi x appartient à G, donc $\mathrm{G}_s \subset \mathrm{G}$. Soit $x \in \mathrm{G}$, alors en appliquant la définition de s avec $y = 0 \in \mathrm{F}$ il vient $s(x) = -x$. Finalement, par double inclusion

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{G}_s}$$

I.A.1.b Soit x appartenant à E. Il existe un unique couple (y, z) dans $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = y + z$. Ainsi,

$$s \circ s(x) = s\big(s(y+z)\big) = s(y - z) = y + z = x$$

d'où, $\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_\mathrm{E}}$

L'endomorphisme s a donc pour inverse lui-même.

$$\boxed{\text{L'application s est un automorphisme de E.}}$$

I.A.1.c D'après la question I.A.1.a,

$$\mathrm{K}er(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{K}er(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{F}_s \oplus \mathrm{G}_s = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}.$$

Dès lors trois cas se présentent :

- Soient $\mathrm{F}_s = \mathrm{K}er(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$ et $\mathrm{G}_s = \mathrm{K}er(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$. L'endomorphisme s a donc pour valeurs propres 1 et -1.
- Soit $\mathrm{F}_s = \{0_\mathrm{E}\}$ et alors $\mathrm{G}_s = \mathrm{E}$.
- Soit $\mathrm{G}_s = \{0_\mathrm{E}\}$ et alors $\mathrm{F}_s = \mathrm{E}$.

Il en découle trois conclusions possibles :

On a respectivement : soit F_s et G_s sont les deux espaces propres, les deux valeurs propres sont 1 et -1. Soit G_s est le seul espace propre, la seule valeur propre est -1. Ou soit F_s est le seul espace propre, la seule valeur propre est 1.

X Maths PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Simon Billouet (ENS Cachan) ; il a été relu par Pauline Tan (ENS Cachan) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse est consacré à des propriétés asymptotiques d'intégrales à paramètre. Il est composé de trois parties indépendantes.

- La première partie s'intéresse au comportement quand t tend vers $+\infty$ d'intégrales du type
$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
à l'aide d'une technique appelée méthode de Laplace, et présente en application une démonstration de la formule de Stirling.
- La deuxième partie établit l'égalité
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
lorsque ψ est une fonction continue 2π-périodique, et f de classe $\mathcal{C}^1$. Une application est proposée dans le cadre des équations différentielles.
- La troisième partie étudie le comportement quand λ tend vers $+\infty$ d'intégrales du type
$$\int_a^b \mathrm{e}^{i\lambda\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
selon une méthode dite de la phase stationnaire.

Les parties sont de difficulté croissante, les dernières questions étant même particulièrement ardues. Toutes les connaissances en calcul intégral sont sollicitées : convergence dominée, intégration par parties, changement de variable. Les première et troisième parties forment un excellent sujet d'entraînement ; à l'exception de la dernière question, la dernière partie ne fait appel qu'au programme de sup.

La disparition des séries de Fourier et de l'intégrale double du programme des classes préparatoires scientifiques rend la deuxième partie hors-programme, ainsi que la dernière question du sujet. Les indications sur ces questions doivent permettre de les traiter en admettant les résultats sortis du programme.

Indications

Partie I

1.a Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

1.b Reprendre le même raisonnement qu'à la question 1.a après avoir effectué le changement de variable $u = \sqrt{t}x$.

3.a Pour montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, écrire des formules de Taylor au voisinage de a pour φ et φ'.

3.b Utiliser le théorème de la bijection.

4.a Montrer que $\Gamma(n) = \Gamma(n+1)/n$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie II

5.b [HP] Admettre le théorème de Parseval, qui assure que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi')|^2$ converge. Utiliser ensuite l'inégalité $x\,y \leqslant \left(x^2+y^2\right)/2$.

5.c [HP] Admettre que ϕ est égale à la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ sur $\mathbb{R}$, où u_n est définie par $u_n : x \longmapsto c_n(\phi)\mathrm{e}^{\,inx}$.

6.a [HP] Admettre que la convergence de la série de la question précédente est normale sur $\mathbb{R}$, afin d'intervertir la somme et l'intégrale.

7.c Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

7.e Appliquer l'inégalité triangulaire et utiliser la question 7.c.

7.f Utiliser la variante du résultat sur les sommes de Riemann pour des subdivisions non régulières. Précisément : $\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}_\varepsilon - 1} (x_{k+1}^\varepsilon - x_k^\varepsilon) f(x_k^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

8.b [HP] La méthode de variation des constantes fait l'objet d'une remarque en introduction de la réponse de ce corrigé.

8.c Appliquer le résultat de la question 7.f avec $\phi = g$ et $f = \sin(t - \cdot)$.

Partie III

9.b Montrer par récurrence que $\mathrm{I}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^{\mathrm{N}}} \left(\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{M}^{\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$ pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

10.a La fonction φ' étant monotone, φ'' est de signe constant sur $[\,a\,;b\,]$: par suite,

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi''(x)}{\phi(x)^2}\,\mathrm{d}x \right| = \int_a^b \frac{|\varphi''(x)|}{\phi(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

11.a Discuter suivant les signes possibles de φ' et φ'' sur $[\,a\,;b\,]$.

11.b Utiliser l'égalité des accroissements finis et traiter les 5 cas de la question 11.a.

11.c Découper l'intervalle de sorte à pouvoir appliquer le résultat de la question 10.b sur certains des morceaux.

11.d Minimiser la fonction $\delta \longmapsto 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.e [HP] Utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour f'. Utiliser ensuite le résultat suivant (*théorème de Fubini sur un triangle*) : si h est une fonction à valeurs réelles continue sur le carré $[\,a\,;b\,] \times [\,a\,;b\,]$,

$$\int_a^b \left(\int_x^b h(x,t)\,\mathrm{d}t \right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^t h(x,t)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}t$$

I. Intégrales à phase réelle

1.a Soit $t > 0$. Effectuons le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{td} \mathrm{e}^{-u} g\left(\frac{u}{t}\right)\,\mathrm{d}u$$

Définissons la fonction $g_t\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto g\left(\dfrac{u}{t}\right)\mathbf{1}_{[\,0\,;td\,]} \end{cases}$

où $\mathbf{1}_{[\,0\,;td\,]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[\,0\,;td\,]$. La fonction g_t est continue par morceaux (comme produit de deux fonctions continues par morceaux) sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u$$

Déterminons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$ tendant vers $+\infty$. Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u)\,\mathrm{d}u$ existe en utilisant le théorème de convergence dominée. Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$f_n\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u) \end{cases}$$

- La fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $u \in [\,0\,;+\infty\,[$. Par hypothèse, il existe un entier N tel que $u \leqslant t_n d$ dès que $n \geqslant \mathrm{N}$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a donc $f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} g\left(u/t_n\right)$. Par continuité de g en 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} g(0)$: ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u} g(0)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
- L'inégalité $|f_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u}\|g\|_\infty$ est valable pour $u \in [\,0\,;+\infty\,[$, et la fonction de domination $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}\|g\|_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g(0)\,\mathrm{d}u = g(0)$$

Cette égalité étant vraie pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u = g(0)$$

La quantité $g(0)$ étant non nulle, on peut affirmer que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x \times \frac{t}{g(0)}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u\right) \times \frac{1}{g(0)} = 1$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}}$$

1.b Soit $t > 0$. Le changement de variable linéaire $u = \sqrt{t}x$ donne l'égalité

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}d} \mathrm{e}^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}u$$

On pose $$g_t\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto g\left(u/\sqrt{t}\right) \mathbf{1}_{[\,0\,;\sqrt{t}d\,]} \end{cases}$$

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \mathrm{e}^{-u^2} g_t(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-u^2} g(0) \qquad \text{et} \qquad \left|\mathrm{e}^{-u^2} g_t(u)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \|g\|_\infty$$

avec $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2} \|g\|_\infty$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite combinée au théorème de convergence dominée, on montre comme à la question 1.a que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{\sqrt{t}d} \mathrm{e}^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}u = g(0) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = g(0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que $$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} \int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, $$\boxed{\int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{g(0)}{\sqrt{t}}}$$

2.a La fonction Φ, en tant que somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction constante, est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\Phi' = \varphi'$ est une fonction strictement positive sur $[\,a\,;b\,]$. La fonction Φ est donc strictement croissante sur $[\,a\,;b\,]$; comme elle y est de plus continue, elle réalise une bijection de $[\,a\,;b\,]$ sur $[\,\Phi(a)\,;\Phi(b)\,]$. Or, $\Phi(a) = 0$. En notant $\beta = \Phi(b)$, on obtient que

$$\boxed{\Phi \text{ réalise une bijection de } [\,a\,;b\,] \text{ sur } [\,0\,;\beta\,]\text{, de classe } \mathcal{C}^1.}$$

2.b La question précédente montre que Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $[\,a\,;b\,]$, sa réciproque Φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$. Le changement de variable $x = \Phi^{-1}(u)$ est donc admissible :

$$\mathrm{d}x = \left(\Phi^{-1}\right)'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u$$

On a donc $$\mathrm{F}(t) = \mathrm{e}^{-t\varphi(a)} \int_0^\beta \mathrm{e}^{-tu} f(\Phi^{-1}(u)) \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u$$

Soit $$g\colon \begin{cases} [\,0\,;\beta\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto f(\Phi^{-1}(u)) \dfrac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)} \end{cases}$$

En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction g est continue sur $[\,0\,;\beta\,]$. De plus, $g(0) = f(a)/\Phi'(a) = f(a)/\varphi'(a) \neq 0$ puisque $f(a) \neq 0$. D'après le résultat de la question 1.a,

$$\int_0^\beta \mathrm{e}^{-tu} f(\Phi^{-1}(u)) \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)t}$$

Puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\phi(a)}$ ne s'annule pas sur un voisinage de $+\infty$, on en déduit enfin que

$$\boxed{\mathrm{F}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}}$$