

ANNALES DES CONCOURS

PSI  
Physique et Chimie  
2013

Sous la coordination de

Sébastien DESREUX

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Vincent FREULON

Professeur agrégé à l'ENS Ulm

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Mickaël PROFETA

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Alizée DUBOIS  
ENS Cachan

Alexandre HÉRAULT  
Professeur en CPGE

Kim LARMIER  
ENS Ulm

Rémi LEHE  
ENS Ulm

Guillaume MAIMBOURG  
ENS Cachan

Fabrice MAQUÈRE  
Professeur agrégé

Tom MOREL  
Professeur agrégé

Bruno SALQUE  
ENS Lyon

Étienne THIBIERGE  
ENS Lyon

Tiphaine WEBER  
Enseignant-chercheur à l'université

*Les auteurs remercient Jean-Julien Fleck pour la précieuse aide qu'il a apportée à la préparation de cet ouvrage.*

## Des annales, pour quoi faire ?

Quand on prépare les concours, on ne peut rien laisser au hasard : il faut étudier chaque leçon, apprendre chaque exercice classique, en somme, travailler en détail tout ce qui peut tomber. Reste à savoir ce qui tombe vraiment !

Se confronter aux écrits de la dernière session est le meilleur moyen de préparer la suivante. Les *Annales des Concours* sont également un bon outil pour préparer les compositions pendant l'année. L'idée directrice de cet ouvrage s'inspire des manuels de Terminale mais nous avons ajouté, pour chaque sujet, des indications et de nombreux commentaires méthodologiques et scientifiques. Dans le même esprit, nous avons regroupé en fin d'ouvrage les formulaires les plus utiles.

## Comment utiliser cet ouvrage ?

Les devoirs pendant l'année sont des entraînements précieux, mais ils sont généralement trop courts ou trop longs. Trop courts, parce que les compositions sur table en temps limité ne vous laissent guère le loisir de creuser les questions ; en s'interdisant de consacrer aux questions difficiles le temps qu'elles méritent, on se condamne à ne savoir résoudre que les questions faciles – celles qui rapportent peu de points. Trop longs, parce que les devoirs à la maison vous laissent seul face à un énoncé dont certaines questions sont susceptibles de vous bloquer complètement, ou de vous faire travailler pendant un temps déraisonnable. En prépa, le temps est compté.

Muni de cet ouvrage, vous pourrez rationaliser votre préparation. Commencez par parcourir l'énoncé, sans le lire de manière exhaustive ni tenter de le résoudre de tête : cherchez simplement à acquérir une idée générale de la destination du problème et des moyens qu'il se propose d'employer pour y parvenir. Travaillez de votre côté, en vous reportant au corrigé à la fin de chaque partie pour vérifier que vous êtes sur la bonne voie. Lorsque vous êtes confronté à une question qui semble insurmontable, consultez les indications puis réessayez. Si cela ne suffit pas, n'hésitez pas à lire en détail la solution de cette question, vérifiez que vous l'avez bien comprise et concentrez-vous sur la question suivante, sans l'aide du corrigé.

C'est dans cette perspective que nous avons écrit cet ouvrage, auquel nous avons apporté tout notre soin : au moins trois personnes ont travaillé sur chaque corrigé. Nous espérons qu'il vous aidera efficacement dans votre préparation.

## Écrivez-nous !

Vos critiques, suggestions ou propositions nous aideront à améliorer encore nos ouvrages. Si vous souhaitez nous en faire part, n'hésitez pas à nous écrire :

`contact@H-K.fr`

Si vous détectez une erreur, nous vous serions reconnaissants de nous en faire part :

`Errare.humanum.est@H-K.fr`

## Retrouvez-nous en ligne

Sur notre site [www.H-K.fr](http://www.H-K.fr), vous trouverez nos errata (les erreurs signalées et les correctifs), des compléments, et bien d'autres ouvrages. Nous attendons votre visite.

Bon courage, et bonne réussite !  
Les auteurs

*Cet ouvrage n'aurait pu exister sans l'aide d'Étienne Audebeau, Cédric Lépine, Stéphane Ravier, Laure Valentin et Gladys Vanhemelsdaele. Qu'ils en soient ici remerciés.*

# Sommaire thématique de Physique

2004 – 2013

X MP Physique	③	①	⑤	④		①	⑤		③
X MP Physique et SI	①		⑥	⑥		①	③		④
X PC Physique A	①	②	③	⑤	④	③	②		②
X PC Physique B	①	③	④	④	③	①	⑤	③	④
Mines MP Physique 1	③	②	②	⑦			④		③
Mines MP Physique 2	②		⑥	⑥		①	⑤		
Mines PC Physique 1	⑤	①	④	⑥	②	②	②	①	③
Mines PC Physique 2	②	①	①	⑤	⑤	②	①	③	⑤
Mines PSI Physique 1	①		④	⑥	③	③	⑤	③	②
Mines PSI Physique 2	②	①	③	②	⑦	②	②	①	①
Centrale MP Physique	②	②	⑤	⑧			⑦		⑤
Centrale MP Physique et Chimie	②	③	⑥	③			③	①	②
Centrale PC Physique 1	①	③	③	⑦	⑤	③	④	②	③
Centrale PC Physique 2	③	②	③	①	⑥	②	④	①	①
Centrale PSI Physique	③	①	⑤	④	⑥	②	③	①	④
Centrale PSI Physique et Chimie		④	①	①	①	②	④	③	①
CCP MP Physique 1	⑩	④		⑩					④
CCP MP Physique 2			⑥				⑦	②	⑩
CCP PC Physique 1	③	①	④	⑤	④	②	④		④
CCP PC Physique 2	①	④	⑧			②	④		⑨
CCP PSI Physique 1	①	①	⑥	③	⑦	③	①	②	④
CCP PSI Physique 2	②		⑥	④	③	③	④		①
E3A PSI Physique		①	④	①	②	②	②	③	①
E3A PSI Physique et Chimie	③	③	⑤		③	①	①		②
① : 1 fois depuis 2004 ② : 2 fois depuis 2004 ⋮ ⑨ : 9 fois depuis 2004 ① : 1 fois depuis 2004 dont 2013 ② : 2 fois depuis 2004 dont 2013 ⋮ ⑩ : 10 fois depuis 2004 dont 2013	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Électrostatique, magnétostatique et électronique	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme dans le vide	Électromagnétisme dans les milieux	Optique

---

# Sommaire

---

		Énoncé	Corrigé
<b>E3A</b>			
Physique	Capteurs de proximité. <i>électrostatique, théorème de Gauss, magnétisme dans les milieux, théorème d'Ampère, analyse complexe</i>	11	20
Physique et Chimie	Étude et observation de l'écoulement d'un glacier. Mouvement d'un glacier. <i>mécanique des fluides, viscosité, interférences à deux ondes, cristallographie, atomistique, potentiel chimique, thermodynamique, diagrammes de phases</i>	39	51

## CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Physique 1	Instruments en aviation légère et sismomètre vertical de Wiechert. <i>mécanique des fluides, mécanique du solide</i>	76	88
Physique et Chimie	L'aluminium. <i>cristallographie, chimie des solutions, thermochimie, mécanique des fluides, électromagnétisme, électrocinétique</i>	108	123

## CENTRALE-SUPÉLEC

Physique	Les frottements de glissement. <i>diffusion thermique, mécanique des fluides</i>	152	159
Physique et Chimie	Quelques aspects de la physique et de la chimie du piano. <i>propagation des ondes, cristallographie, électrochimie, synthèse organique</i>	178	186

**MINES-PONTS**

Physique 1	Modulation acousto-optique. <i>ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, modulation, interférences</i>	216	222
Physique 2	Énergie éolienne. <i>équation de Bernoulli, bilan de quantité de mouvement, électrocinétique, analyse spectrale</i>	235	243
Chimie	Le plomb. <i>cristallographie, diagramme d'Ellingham, diagramme E-pH, oxydoréduction, solutions aqueuses, chimie organique</i>	263	270

**FORMULAIRES**

Constantes physiques	283
Constantes chimiques	280
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

# Sommaire thématique de Chimie

2004 – 2013

X PC Chimie		②	②	⑤	③	①	③	⑥	②	①	⑩
Mines MP Chimie	⑧	⑨	②	④	⑥	⑤		⑧		④	
Mines PC Chimie	⑥	⑤	④	⑦	⑥	①	①	⑥	②	②	⑩
Mines PSI Chimie	⑧	⑧	⑤	④	⑤	⑦	③	⑦		④	④
Centrale MP Physique et Chimie	④	③	④	③	⑥	①		⑧	②	①	
Centrale PC Chimie	③	①	⑤	⑥	③	③	①	⑦	⑤		⑩
Centrale PSI Physique et Chimie	①	⑤	②	④	④	⑤	③	⑤		③	②
CCP MP Chimie	⑥	③	⑥	③	⑧	②		⑧	①	①	
CCP PC Chimie 1	⑤	⑧	⑤	③	⑤	③	③	⑥	⑥	③	⑩
CCP PC Chimie 2	⑥	⑧	⑦	⑦	⑤	②	②	⑧	③	④	⑩
CCP PSI Physique 2	③	⑤	⑤		③	④	③	⑤		①	
E3A PSI Physique et Chimie	①	④	①	②	②		②	⑦		①	①
① : 1 fois depuis 2004 ② : 2 fois depuis 2004 ⋮ ⑨ : 9 fois depuis 2004 ① : 1 fois depuis 2004 dont 2013 ② : 2 fois depuis 2004 dont 2013 ⋮ ⑩ : 10 fois depuis 2004 dont 2013	Atomistique	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-r-pH	Courbes intensité-potentiel	Thermochimie	Mélanges binaires	Diagrammes d'Ellingham	Chimie organique

## E3A Physique PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) ; il a été relu par Étienne Thibierge (ENS Lyon) et Vincent Freulon (ENS Ulm).

---

Ce sujet étudie le fonctionnement de deux capteurs de proximité sans contact.

- La première partie s'intéresse à un capteur capacitif. La cible à détecter formant l'une des armatures d'un condensateur, la capacité de ce dernier dépend de la distance entre la cible et le capteur. Dans un premier temps, on établit la valeur de la capacité en fonction de la distance via le théorème de Gauss électrostatique. La suite du problème analyse le fonctionnement du circuit électronique permettant de conditionner le capteur puis de mettre en forme le signal. L'objectif final est d'obtenir une tension image de la distance séparant l'obstacle du capteur.
- La seconde partie traite du fonctionnement d'un capteur inductif à réluctance variable. Cette fois-ci, le principe est de former avec la cible un circuit magnétique fermé dans lequel un champ magnétique est imposé. Ce dernier circule à travers une bobine dont l'inductance dépend donc de la distance du capteur à l'obstacle. Comme dans la partie précédente, l'énoncé propose d'étudier le conditionnement du capteur et du signal pour obtenir finalement un signal de sortie proportionnel à la distance entre la cible et le capteur.

De difficulté raisonnable, ce sujet est long et comporte des calculs lourds, principalement dans la seconde partie. Une large place est faite aux approximations qui permettent de simplifier le problème et de trouver les plages pour lesquelles les capteurs présentent une réponse linéaire, c'est-à-dire où la tension de sortie est directement proportionnelle à la distance séparant le capteur de l'obstacle. Enfin, saluons l'effort fait par le concepteur du sujet pour présenter un problème technique auquel on donne une réponse satisfaisante en pratique, dans une démarche d'ingénieur.

## INDICATIONS

### Partie A

- A.2 Appliquer le théorème de Gauss à chacune des armatures indépendamment puis conclure en superposant les champs créés par chacune des armatures.
- A.3 Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique de rayon compris entre ceux des deux armatures.
- A.4 La capacité  $C(z)$  est celle d'un condensateur plan, tandis que la capacité  $C_e$  est celle d'un condensateur cylindrique.

### Partie B

- B.1 Les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux. Le courant entrant par les bornes inverseuse et non inverseuse est donc nul.
- B.2 Le système fonctionne en boucle fermée (la sortie est reliée à l'entrée). Ainsi, en notation complexe,

$$\underline{v}_s(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \underline{v}_s(j\omega)$$

- B.5 Supposer pour cette question que le facteur d'amortissement est maintenu nul par le montage électronique. L'équation différentielle se réduit alors à

$$RC_0 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{1}{RC_0} \left( 1 - \frac{k\Delta z}{z_0} \right) v_s = 0$$

### Partie C

- C.4 Exprimer  $\cos \varphi$  en s'aidant de la relation trigonométrique donnée par l'énoncé. Utiliser ensuite l'identité  $\tan(\text{Arctan } \varphi) = \varphi$ .
- C.5 La sensibilité d'un capteur se définit comme le rapport de la variation de la grandeur de sortie  $\sigma$  sur la variation de la grandeur d'entrée  $\varepsilon$ .

$$S = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

### Partie D

- D.4 Les lignes de champ étant parfaitement guidées, le flux magnétique se conserve le long du circuit magnétique.
- D.7 L'inductance  $L$  d'une bobine est définie par la relation  $L = \Phi/I$ .
- D.8 Déterminer l'équivalent de la loi d'Ohm pour un circuit magnétique.

### Partie E

- E.2 Déterminer indépendamment le potentiel électrique aux nœuds A et B en fonction de la tension aux bornes du générateur de tension, puis résoudre l'équation  $\underline{u}_A = \underline{u}_B$ .

### Partie F

- F.1 Le théorème de Millman en B permet d'exprimer  $\underline{v}_B$  en fonction de  $\underline{v}_G$ .

## I. CAPTEUR DE PROXIMITÉ CAPACITIF

### A. Étude du condensateur de mesure

**A.1** Notons  $V$  un volume délimité par une surface fermée  $S$ , de normale orientée vers l'extérieur. Soit  $Q_{\text{int}}$  la charge totale contenue dans le volume  $V$ . Le théorème de Gauss, dans le vide, s'énonce

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss est l'écriture sous forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss après application du théorème de Green-Ostrogradsky. En notant  $\rho$  la densité volumique de charge,

donc

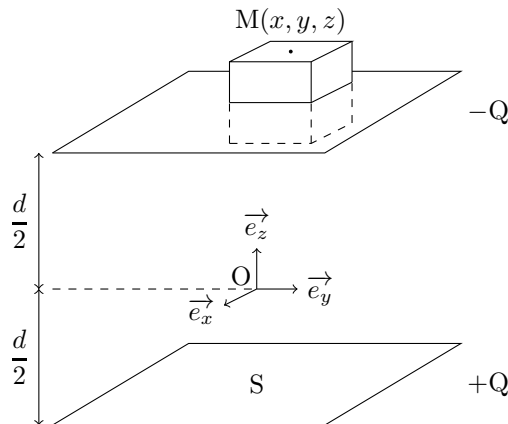
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

soit

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

**A.2** Négligeons les effets de bord et considérons le cas d'un condensateur plan infini.



Considérons le point  $M(x, y, z)$  comme sur le dessin.

- Tout plan contenant  $(M, \vec{e}_z)$  est plan de symétrie du problème. Comme le champ électrique est un vecteur polaire, il est dirigé selon  $\vec{e}_z$ .

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z$$

- Puisque le problème est invariant par translation dans le plan des armatures, la norme du champ électrique ne dépend que de la variable  $z$ .

$$E(M) \vec{e}_z = E(z) \vec{e}_z$$

Appliquons le théorème de Gauss à chacune des deux armatures successivement. En effet, le problème étant linéaire, le champ électrique total est la superposition du champ électrique dû à chacune des armatures. Effectuons le calcul pour l'armature supérieure de charge  $-Q$ . Prenons l'origine des ordonnées au centre des deux armatures. La surface fermée choisie pour l'intégration est représentée en haut de la figure et contient le point M, point où l'on cherche l'expression du champ électrique. Elle enferme une surface  $S_e$  de l'armature. Introduisons la charge surfacique  $\sigma = Q/S$ . D'après le théorème de Gauss, en notant  $\vec{E}_{\text{sup}}$  le champ électrique relatif à l'armature supérieure,

$$\oiint_{S_e} \vec{E}_{\text{sup}} \cdot d\vec{S} = \frac{-\sigma S_e}{\varepsilon_0}$$

Or, sur les bords de normale  $\vec{e}_x$  ou  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . Finalement, pour  $z \in [-d/2; d/2]$ ,

$$(E_{\text{sup}}(d-z) - E_{\text{sup}}(z)) S_e = \frac{-\sigma S_e}{\varepsilon_0}$$

Enfin, le plan formé par l'armature supérieure constitue un plan de symétrie pour la distribution de charge de cette seule armature. Par conséquent,

$$E_{\text{sup}}(d-z) = -E_{\text{sup}}(z)$$

Ainsi, pour  $z \in [-d/2; d/2]$   $\vec{E}_{\text{sup}}(z) = +\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z$

Dans l'approximation d'armatures infinies, le champ électrique est donc indépendant de la distance à l'armature.

Un raisonnement similaire s'applique sur la plaque inférieure en changeant  $-Q$  en  $+Q$  et  $d/2$  en  $-d/2$  et conduit, pour  $z \in [-d/2; d/2]$ , à :

$$\vec{E}_{\text{inf}}(z) = +\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Superposons les 2 champs électriques pour obtenir le champ total entre les armatures :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{\text{inf}} + \vec{E}_{\text{sup}} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \vec{e}_z}$$

Le potentiel est relié au champ électrique par :

$$\vec{\text{grad}} U = -\vec{E}$$

Le champ électrique étant dirigé dans la direction  $\vec{e}_z$ , la relation précédente s'écrit

$$\frac{dU}{dz} = -E_z$$

Le champ électrique étant constant, la tension aux bornes du condensateur vaut

$$U = -E_z d$$

La capacité du condensateur s'écrit alors

$$\boxed{C = \frac{Q}{|U|} = \frac{S\varepsilon_0}{d}}$$

## E3A Physique et Chimie PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Étienne Thibierge (ENS Lyon) et Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Jérôme Lambert (Enseignant-chercheur à l'université), Christelle Serba (ENS Lyon), Vincent Freulon (ENS Ulm) et Laure-Lise Chapellet (ENS Lyon).

---

Ce problème propose d'étudier les glaciers sous plusieurs aspects : leur dynamique, les méthodes modernes utilisées par les glaciologues pour leur suivi, et la structure microscopique de la glace. Il se compose de trois parties, deux portant sur la physique et une sur la chimie.

- La partie I modélise la dynamique des glaciers en les considérant comme des fluides newtoniens de très grande viscosité cinématique. L'objectif est d'obtenir la valeur de cette viscosité à partir de relevés expérimentaux de leur avancée annuelle. On commence par dégager certaines caractéristiques des écoulements de fluides très visqueux le long d'un plan incliné infini, avant de passer à un modèle plus réaliste dans lequel l'écoulement est limité à un canal de largeur finie. Les questions sont classiques, de difficulté progressive et habituelle à ce niveau.
- On s'intéresse ensuite dans la partie II au projet MEGATOR de suivi satellitaire d'un glacier alpin par interférométrie d'ondes radar. On commence par retrouver des résultats sur l'expérience des trous d'Young en lumière visible, puis on présente le dispositif satellitaire et on explique comment une telle technique permet de reconstruire une image tridimensionnelle du glacier. Le début est proche du cours et le saut en difficulté est brutal lorsque l'on aborde la sous-partie D, qui demande une compréhension fine d'un dispositif inhabituel et qui peut être qualifiée de difficile.
- La troisième partie de ce problème s'intéresse à l'étude chimique de l'eau. Elle aborde sa structure, à l'aide de questions d'atomistique, puis la formation de la glace d'un point de vue thermodynamique et enfin cristallographique. Les questions sur le moment dipolaire de la liaison O-H, la structure cristallographique de la glace diamant et l'utilisation en thermodynamique du diagramme de Clapeyron sont classiques.

L'ensemble permet d'évaluer sa connaissance et sa compréhension du cours ; quelques questions plus ouvertes nécessitent une certaine culture scientifique. Pour avancer rapidement, il était utile de connaître les principaux résultats classiques.

## INDICATIONS

### Première partie

- A.5. Penser à une invariance par translation de l'écoulement.
- A.7. Pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement, qui est une contrainte tangentielle, est proportionnelle au taux de cisaillement  $\frac{dv_x}{dz}$ .
- A.10. On peut calculer le débit volumique en imaginant que le champ des vitesses de l'écoulement est uniforme, égal à la vitesse moyenne en tout point.
- A.11. On peut comparer l'énergie cinétique d'un volume de fluide au travail de la force visqueuse.
- B.3. L'énoncé est imprécis. Il faut lire  $\frac{\partial v'}{\partial z'}$  au lieu de  $\frac{dv'}{dz'}$ .
- B.6. La vitesse moyenne mesurée est celle du point le plus rapide du glacier ... qui ne se déplace pas à  $v_0$ .

### Deuxième partie

- C.2. Le rapport  $z/D$  est un infiniment petit d'ordre 1.
- D.5. Analyser soigneusement la définition de  $\delta R$  en termes de chemins optiques pour pouvoir dégager des analogies avec les trous d'Young.  $\delta R$  s'interprète plutôt comme une *différence de* différences de marche entre un point Q et un point de référence P que comme une simple différence de marche entre deux chemins optiques.
- D.7. Il peut être utile de remarquer que  $\delta R_1 = \delta R(z = C^{te})$ .
- D.9. Les photographies représentent les interférences obtenues dans un plan  $(x, y)$ . La direction horizontale est  $x$ , la direction verticale est  $y$ . L'axe  $z$  sort de la feuille.

### Troisième partie

- E.3 Projeter les moments dipolaires des liaisons sur le moment dipolaire total.
- E.4 Calculer le moment dipolaire d'une liaison purement ionique.
- F.1 Utiliser un calcul de variance.
- F.3 À l'équilibre de changement de phase, la relation suivante est vérifiée :
- $$g_{(liq)} = g_{(s)}$$
- F.6 Attention, une mole de sel se dissocie en deux moles d'ions en se dissolvant.
- G.3 Le centre d'un tétraèdre régulier se situe aux trois quarts de sa hauteur.
- G.7 L'utilisation d'un dessin projeté rend beaucoup plus facile le décompte des atomes d'oxygène.
- G.8 L'agencement local des molécules d'eau est encore tétraédrique. Le contact entre deux molécules se fait donc le long de la grande diagonale.

## I. ÉCOULEMENT D'UN GLACIER

### A. Étude préliminaire (écoulement d'une couche de miel)

**A.1** Le moteur de l'écoulement est la pesanteur, et dans le repère choisi  $\vec{g}$  n'a pas de composante selon  $\vec{e}_y$ . Le système étant en outre invariant par translation le long de l'axe  $Oy$ , on en déduit que  $\vec{v}(M)$  est inclus dans le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ .

Par ailleurs, l'épaisseur de fluide est supposée uniforme (indépendante de  $x$  et de  $y$ ) et constante (indépendante du temps). Il ne peut donc pas y avoir d'écoulement dans la direction  $z$ , ce qui permet de dire que  $\vec{v}(M)$  est inclus dans le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

On trouve donc que  $\vec{v}(M)$  est orienté parallèlement à  $\vec{e}_x$ . Enfin, l'écoulement se fait dans le sens des  $x$  croissants : le fluide ne peut pas remonter la pente spontanément. Les lignes de courant étant tangentes au vecteur vitesse en tout point, on en déduit que

Les lignes de courant sont les droites parallèles à l'axe des  $x$  et orientées vers les  $x$  positifs.

**A.2** À la question précédente, on a montré que

$$\vec{v}(M) = v(x, y, z) \vec{e}_x$$

Montrons maintenant que  $v$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ . Utilisons d'abord l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit pour un écoulement incompressible

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Dans le cas présent, cette équation se simplifie en

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ce qui indique que  $v$  ne dépend pas de  $x$ . En outre, en supposant le fluide infini le long de la direction  $y$ , le problème est invariant par translation dans cette direction. On en déduit que  $v$  ne dépend pas non plus de  $y$ . Ainsi, il reste seulement

$$\vec{v}(M) = v(z) \vec{e}_x$$

**A.3** Écrivons l'équation de Navier-Stokes en explicitant la dérivée particulaire,

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} \right] = - \operatorname{grad} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Cette équation se simplifie beaucoup dans le cas présent :

- L'écoulement étant stationnaire, la dérivée temporelle est nulle.
- Le terme d'accélération convective est nul également. En effet,

$$(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) v(z) \vec{e}_x = \vec{0}$$

- Le champ des vitesses ne dépendant que de  $z$ , son laplacien peut s'écrire comme une dérivée droite.

Finalement, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dz^2}$$

**A.4** L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  se projette sous la forme

$$\vec{g} = g \sin \alpha \vec{e}_x - g \cos \alpha \vec{e}_z$$

On peut s'assurer que les signes et les fonctions trigonométriques sont les bons en regardant les cas limites  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi/2$ .

La forme du champ des vitesses trouvée à la question A.2 et l'équation obtenue à la question A.3 permettent d'exprimer les composantes de  $\overrightarrow{\text{grad}} P$  comme

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha \end{cases}$$

**A.5** La pression dépend a priori des trois variables d'espace :  $P = P(x, y, z)$ . Néanmoins, la nullité de sa dérivée partielle par rapport à  $y$  indique que le champ de pression n'en dépend pas. Par ailleurs, la continuité de la pression en  $z = h$  impose que pour tout  $x$ ,  $P(x, h) = P_{\text{atm}}$ . Par ailleurs,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha$$

donc

$$P(x, z) = -\rho g \cos \alpha z + P_1(x)$$

où  $P_1(x)$  est une fonction à déterminer. Or à l'interface avec l'air la pression dans le fluide est égale à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}}$  pour toute valeur de  $x$ . Ainsi,

$$P(x, h) = P_{\text{atm}} = -\rho g \cos \alpha h + P_1(x)$$

On en déduit

$$P_1(x) = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha h$$

Ainsi le champ de pression dans l'écoulement ne dépend que de  $z$ , et

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g \cos \alpha (h - z)$$

Remarquons que ce résultat n'est autre que la loi de l'hydrostatique formulée dans le repère tourné de l'angle  $\alpha$ . Trois caractéristiques de l'écoulement se combinent pour donner ce résultat :

- il est stationnaire ;
- aucune différence de pression n'est imposée ;
- sa géométrie impose la nullité du terme d'accélération convective, qui pourrait ajouter une composante dynamique à la pression.

## CCP Physique 1 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alizée Dubois (ENS Cachan) ; il a été relu par Rémi Lehe (ENS Ulm) et Emmanuel Bourgeois (professeur en CPGE).

---

Le sujet est composé de deux parties indépendantes consacrées à l'étude d'instruments de mesure utilisés en aviation, puis au fonctionnement d'un sismomètre.

- La première partie présente les différentes façons de mesurer la vitesse horizontale et verticale de l'avion, son cap, l'angle des virages qu'il effectue et son altitude. Il est remarquable que toutes ces informations résultent de simples mesures de pression ou d'angle. Cette partie utilise la dynamique et la statique des fluides.
- La seconde partie propose d'étudier un sismomètre. La manière de récupérer puis de transmettre les vibrations du sol jusqu'à l'observateur est détaillée. L'idée est de voir comment transformer une oscillation verticale, le mouvement de la croûte terrestre lors d'un tremblement de terre, en une translation horizontale mesurée par un capteur magnétique. Cette analyse est principalement faite grâce à des résultats de mécanique et aboutit à l'étude de la fonction de transfert du sismomètre.

Ce sujet ludique aborde de plusieurs manières le cheminement de l'information, depuis la mesure d'une quantité physique jusqu'à son analyse par l'observateur. Les questions sont cependant de difficultés inégales, et parfois mal posées. Les raisonnements demandés sont le plus souvent proches de ceux faits en cours, si bien que le principal écueil réside dans la compréhension et l'interprétation de l'énoncé.

## INDICATIONS

### Problème A

- A.3 Utiliser le théorème de Bernoulli sur deux lignes de courant passant respectivement par A et B.
- A.6 Comparer l'effet de la pseudo-force d'inertie d'entraînement sur deux portions symétriques de la boussole. En résulte-t-il un couple ?
- A.11 Utiliser l'hypothèse des faibles altitudes  $z \ll H$ .
- A.14 Revenir à la définition du gradient.
- A.16 La paroi supérieure de la capsule subit la force de pression extérieure ainsi qu'une force de rappel élastique.
- A.17 Penser à la correspondance entre P et  $z$  (par exemple en utilisant les résultats de la question A.10).
- A.19 Dériver le principe fondamental de la dynamique par rapport au temps, après avoir négligé l'accélération. Quel autre terme peut-on négliger ?

### Problème B

- B.2 Calculer la différentielle logarithmique de la loi de Laplace.
- B.3 Quel est le lien entre  $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$  et le débit massique ?
- B.7 Dériver l'égalité de la question B.6 par rapport à  $z$ .
- B.9 La vitesse doit rester bornée.
- B.10 Écrire le débit massique de deux façons : par intégration du profil de vitesse ou en utilisant la vitesse moyenne.
- B.15 Travailler sur le système {bloc + tige sans masse} en prenant garde au référentiel d'étude.
- B.18 Utiliser l'équation obtenue en B.15 et le PFD appliqué à la tige mobile LM. Lier les deux expressions grâce aux relations entre les longueurs et les forces trouvées aux questions précédentes.
- B.19 L'énoncé comporte ici une erreur : on recherche bien la fonction de transfert d'un passe-haut et non d'un passe-bas.
- B.24 Exploiter la loi de Faraday, en ne considérant que les pulsations pour lesquelles le sismomètre fonctionne.

## A. QUELQUES INSTRUMENTS UTILISÉS EN AVIATION LÉGÈRE

### L'anémomètre (Badin)

**A.1** D'après l'énoncé, avec la baisse de la densité de l'air, la vitesse propre est supérieure à la vitesse indiquée. On peut retrouver avec une bonne approximation la vitesse vraie en ajoutant 1% par tranche de 600 pieds au-dessus de l'isobare à 1013 hPa. Comme l'avion vole à 6000 pieds, la vitesse vraie est

$$v_{\text{propre}} = v_{\text{badin}} + \left( \frac{6000}{600} \right) \frac{1}{100} v_{\text{badin}}$$

d'où

$$v_{\text{propre}} = 165 \text{ kt} = 306 \text{ km.h}^{-1}$$

**A.2** Le théorème de Bernoulli énonce que, le long d'une ligne de courant,

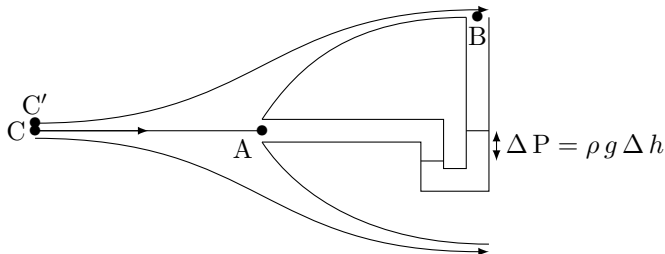
$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = C^{\text{te}}$$

où  $z$  est l'altitude en prenant ( $z/z$ ) l'axe vertical ascendant et où  $\rho$  est la masse volumique du fluide considéré,  $v$  la vitesse de l'écoulement et  $P$  la pression.

Les conditions de validité du théorème sont les suivantes: le fluide est **homogène**, en **écoulement parfait incompressible et stationnaire**, les seules forces volumiques étant les **forces de pesanteur**.

Dans le cas où le fluide est en écoulement irrotationnel, la constante est la même partout dans le fluide et non plus uniquement le long d'une ligne de courant.

**A.3** La situation est équivalente au dessin suivant où A et B sont les deux prises de pression :



Le fluide arrive avec une vitesse qui est l'opposée de celle de l'avion par rapport à l'air notée  $V$ . Considérons deux points C et C' situés en avant de l'avion, proches l'un de l'autre ( $z(C) \simeq z(C')$ ). On a

$$\begin{cases} v(C) = v(C') = V \\ v(A) = v(B) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P(C) = P(C') = P_s \\ P(A) = P_t \end{cases}$$

Le théorème de Bernoulli appliqué le long de la ligne de courant CA donne

$$P(C) + \rho \frac{v(C)^2}{2} + \rho g z(C) = P(A) + \rho \frac{v(A)^2}{2} + \rho g z(A)$$

donc 
$$P(C) + \rho \frac{V^2}{2} = P_t$$

Par ailleurs, le théorème de Bernoulli appliqué sur la ligne de courant C'B donne

$$P(C') + \rho \frac{v(C')^2}{2} + \rho g z(C') = P(B) + \rho \frac{v(B)^2}{2} + \rho g z(B)$$

donc 
$$P(B) = P(C') = P_s$$

Finalement, 
$$P_s + \rho \frac{V^2}{2} = P_t$$

dont on déduit

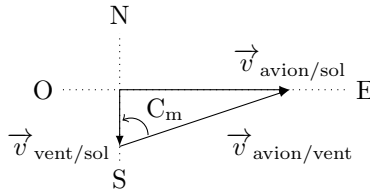
$$V = \sqrt{\frac{2(P_t - P_s)}{\rho}}$$

Le tube de Pitot ne peut mesurer que des vitesses dans l'axe de la prise de pression dynamique. Certains modèles présentent plusieurs ouvertures dans des directions différentes, ce qui permet de déterminer précisément l'angle et la vitesse de l'écoulement. Cet appareil est aussi utilisé sur les bateaux et les voitures de Formule 1.

**A.4** D'après la loi de composition des vitesses,

$$\vec{v}_s = \vec{v}_{\text{avion/vent}} + \vec{v}_{\text{vent/sol}}$$

L'avion devant rester sur un parallèle, la composante selon l'axe Nord-Sud de sa vitesse par rapport au sol doit être nulle.



Il vient 
$$\cos C_m = \frac{\|\vec{v}_{\text{vent/sol}}\|}{\|\vec{v}_{\text{avion/vent}}\|}$$

Puisque le badin indique 100 kt, en appliquant la correction liée à l'altitude on obtient

$$v_{\text{avion/vent}} = 110 \text{ kt}$$

d'où

$$C_m = 79,5^\circ$$

puis

$$v_s = v_{\text{avion/sol}} \sin C_m = 108 \text{ kt}$$

## CCP Physique 2 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Kim Larmier (ENS Ulm) ; il a été relu par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce problème aborde quelques aspects de la physico-chimie de l'aluminium, un métal d'utilisation courante et relativement bon marché. Quelques-unes de ses nombreuses applications sont ainsi étudiées.

- Le problème de chimie couvre une large part du programme. Après une première partie très classique concernant la structure cristalline de l'aluminium métallique, la spéciation en phase aqueuse de ses espèces oxydées est étudiée à travers un dosage acido-basique. L'analyse du comportement de l'aluminium au contact de l'eau est ensuite l'occasion de mettre en application la connaissance des diagrammes potentiel-pH afin d'évaluer sa résistance à la corrosion. Enfin, la dernière partie concerne l'étude thermochimique de la réaction de l'aluminium avec un oxyde de fer employée dans la soudure des rails de chemin de fer.
- Le problème de physique s'intéresse quant à lui à l'application de l'aluminium dans le transport du courant électrique. Dans un premier temps, il est question d'une source d'énergie renouvelable, une éolienne, dont on cherche à évaluer la puissance maximale récupérable, en effectuant des bilans – d'énergie cinétique et de quantité de mouvement – sur l'air traversant l'appareil. Le transport de l'électricité dans une ligne électrique à proprement parler est abordé dans l'ultime partie, qui regroupe une description locale du phénomène, requérant une analyse électromagnétique, pour déterminer la section optimale de la ligne, ainsi qu'un aspect global sur le transport à longue distance, où deux modèles électrocinétiques sont comparés.

Quoique fort long, ce sujet est d'une difficulté modérée. Il nécessite de la rigueur, notamment dans la manipulation de grandeurs physiques algébriques, ainsi qu'une solide connaissance du cours.

## INDICATIONS

### Partie A

A.5 Attention aux unités des grandeurs physiques employées.

### Partie B

B.11 Définir une réaction de dosage et le volume de soude versé pendant l'étape où cette réaction est prépondérante.

B.12 Les points d'apparition et de fin de disparition du précipité sont les points où la concentration en aluminium dissous peut être évaluée.

### Partie D

D.15 Une partie de la réponse figure dans la partie B.

D.21 Supposer un pH neutre ou légèrement acide pour l'eau de pluie.

### Partie F

F.23 Utiliser la règle de Klechkowski.

F.25 Appliquer le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi, et décomposer la transformation en deux étapes : réaction chimique isotherme et évolution thermique des produits.

### Partie G

G.30 Utiliser l'hypothèse « régime permanent » pour la portion de fluide dans la partie active.

### Partie H

H.33 Utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant bien choisie.

H.37 Pour un gaz parfait, l'énergie interne, de même que l'enthalpie, ne dépendent que de la température. Évaluer celle-ci en A et en B.

### Partie I

I.43 Évaluer l'ordre de grandeur du courant de déplacement et du courant de transport grâce aux données.

I.45.b Rechercher la solution sous la forme  $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ .

### Partie J

J.50 Utiliser les impédances complexes des dipôles usuels et travailler en notation complexe.

### Partie K

K.53.a Ne plus utiliser la notation complexe dans cette partie. Revenir aux lois caractéristiques de fonctionnement des dipôles. Utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds pour obtenir deux équations couplées.

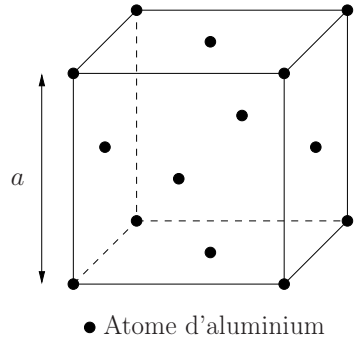
K.54.c Exploiter l'une des équations de couplage pour exprimer l'intensité. L'expression obtenue doit être valable à tout instant.

## PROBLÈME DE CHIMIE

### A. Étude cristallographique de l'aluminium

**A.1** Représentons la maille conventionnelle cubique à faces centrées de l'aluminium métallique en modèle éclaté.

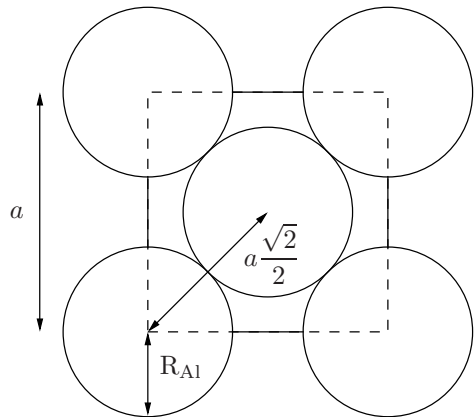
Les atomes d'aluminium sont situés aux sommets du cube ainsi qu'aux centres de chacune des faces.



Cette maille est la maille que l'on représente le plus couramment, et non la maille élémentaire, dont elle est un multiple. Les trois vecteurs de la maille élémentaire partent de l'origine vers les atomes des centres des faces les plus proches.

**A.2** Dans une structure cubique à faces centrées, la tangence entre les atomes se fait suivant la diagonale des faces. Une face vue de dessus peut être représentée comme ci-contre, en utilisant cette fois un modèle compact.

Géométriquement, on constate que le paramètre de maille  $a$  et le rayon atomique de l'aluminium  $R_{Al}$  sont liés par la relation :



$$2 R_{Al} = a \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit} \quad a = 2 \sqrt{2} R_{Al} = 404 \text{ pm}$$

**A.3** Dénombrons le nombre  $Z$  d'atomes dans la maille :

- Les atomes situés aux sommets appartiennent à 8 mailles différentes, et sont au nombre de 8. Il y a donc au total  $8 \times 1/8 = 1$  atome de ce type dans la maille.
- Les atomes situés aux centres des faces appartiennent à 2 mailles différentes, et sont au nombre de 6. Il y a donc au total  $6 \times 1/2 = 3$  atomes de ce type dans la maille.

Il y a donc au total  **$Z = 4$  atomes par maille.**

**A.4** La compacité  $C$  est une grandeur sans dimension définie comme le rapport du volume des atomes contenus dans la maille sur le volume total de celle-ci.

- Le volume  $V_{Al}$  d'un atome d'aluminium, considéré comme une sphère de rayon  $R_{Al}$  vaut  $V_{Al} = 4/3 \pi R_{Al}^3$ .

- La maille étant cubique, le volume total de la maille  $V_{\text{maille}}$  s'écrit quant à lui  $V_{\text{maille}} = a^3$

On en tire l'expression de la compacité :

$$C = \frac{Z V_{\text{Al}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 \pi Z R_{\text{Al}}^3}{3 a^3}$$

Enfin, en substituant à  $a$  son expression en fonction de  $R_{\text{Al}}$  obtenue à la question A.2, on obtient

$$C = \frac{Z \pi \sqrt{2}}{24} = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} \approx 0,74$$

L'empilement cubique à faces centrées est l'un des deux modes d'empilement les plus compacts possibles pour un corps simple, l'autre étant l'empilement hexagonal compact. Par conséquent, n'importe quel autre empilement d'un corps simple doit avoir une compacité inférieure à 74 %.

**A.5** La densité étant une grandeur intensive, on peut la calculer pour toute fraction d'un cristal, par exemple dans la maille définie plus haut : soit  $m_{\text{maille}}$  la masse totale d'aluminium dans la maille, et  $m_{\text{Al}}$  la masse d'un atome d'aluminium, alors

$$\rho_{\text{Al}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{Z m_{\text{Al}}}{a^3} = \frac{Z M_{\text{Al}}}{\mathcal{N}_{\text{A}} a^3} = \frac{Z M_{\text{Al}}}{16\sqrt{2} \mathcal{N}_{\text{A}} R_{\text{Al}}^3}$$

et enfin, avec  $\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

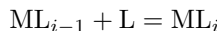
$$d_{\text{Al}} = \frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{Z M_{\text{Al}}}{16\sqrt{2} \mathcal{N}_{\text{A}} R_{\text{Al}}^3 \rho_{\text{eau}}} = 2,73$$

- Pour ce genre de calcul, il est crucial d'être très rigoureux avec les conversions d'unités. Retenir l'ordre de grandeur des densités usuelles, entre 1 et 10, permet de limiter les erreurs.
- La densité de l'aluminium est relativement faible pour un métal, si on la compare à celle du cuivre ou du fer, respectivement 8,96 et 7,87. L'aluminium est un métal léger.

## B. Détermination expérimentale de constantes d'équilibre

**B.6** La constante  $K_s$  est appelée **produit de solubilité**, tandis que la constante  $\beta$  est nommée **constante globale de formation du complexe**.

On désigne  $\beta$  comme une constante « globale » de formation du complexe parce qu'elle est associée à la formation du complexe directement à partir de l'ion métallique « nu » et du nombre adéquat de ligands. À l'inverse, on définit des constantes « successives » de formation, fréquemment notées  $K_i$ , qui sont associées aux réactions d'ajout des ligands un par un :



Le complexe  $[\text{Al}(\text{OH})_4]^-$  se nomme **tétrahydroxoaluminate (III)**.

## Centrale Physique PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Lehe (ENS Ulm) ; il a été relu par Alizée Dubois (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet, composé de quatre parties, porte sur différents phénomènes se produisant à l'interface entre deux solides qui glissent l'un sur l'autre.

- Dans la première partie, on s'intéresse à la manière dont l'énergie thermique qui est produite par les frottements au niveau de l'interface diffuse au sein des solides en contact. On aboutit ainsi à une expression de la température du solide à l'endroit du contact, ainsi que de la profondeur de pénétration de cette énergie.
- La deuxième partie porte sur le contact entre un ski et de la glace, au niveau duquel une partie de la glace fond et réduit ainsi les frottements sur le ski. Après avoir établi la raison de la fusion de la glace, on calcule la force de frottement visqueux qu'exerce le film d'eau sur le ski.
- La troisième partie se concentre sur le calcul de l'épaisseur du film liquide qui s'établit entre le ski et la glace. Cette épaisseur résulte de deux effets antagonistes : la fusion de la glace, qui tend à l'augmenter, et l'expulsion latérale de l'eau sous l'effet du poids du skieur, qui tend à la réduire.
- Enfin, la quatrième partie s'intéresse à l'analyse de deux modèles mésoscopiques de contact entre solides (en l'absence de film liquide intermédiaire). On cherche à savoir si ces modèles reproduisent certains faits expérimentaux.

Les trois premières parties couvrent un large spectre de connaissances (thermodynamique, diffusion thermique, mécanique des fluides). Restant assez proches du cours, elles sont de difficulté moyenne et constituent ainsi un bon exercice de révision. Par ailleurs, la deuxième partie est particulièrement intéressante pour la culture générale, car elle permet de départager deux hypothèses (souvent évoquées à parts égales dans certains écrits de vulgarisation) concernant l'origine de la fusion de la glace sous un ski.

La quatrième partie peut paraître plus difficile, car elle s'éloigne du cours et fait plus appel à l'intuition physique. Elle se rapproche en cela de l'esprit des concours du type X/ENS.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A.1 Effectuer un bilan thermodynamique sur une tranche de solide située entre  $z$  et  $z + dz$ .
- I.A.2.c Effectuer d'une part un bilan thermodynamique sur l'ensemble du cylindre semi-infini, et calculer d'autre part sa variation d'énergie interne (en utilisant le fait que l'énergie interne d'un petit volume de solide  $dV$  s'exprime comme  $dU = \rho c T dV$ ).
- I.B.1 Remarquer que le travail des forces de frottement exercées par  $\mathcal{C}_1$  sur  $\mathcal{C}_2$  est nul.
- I.C.1 On peut supposer, dans ce cas là, que  $\phi_1 = \phi_2$ .

### Partie II

- II.A.2 Utiliser la relation de Clapeyron pour déterminer la pente de la droite d'équilibre solide-liquide.
- II.A.4 Le patin étant isolant,  $j_0 = -p_s$ .
- II.A.6 Dans l'hypothèse de Reynolds, la vitesse du patin et le matériau dont il est fait ont-ils une influence sur le mécanisme de fusion ?
- II.B.1 Utiliser l'incompressibilité de l'eau.
- II.B.4 Utiliser la formule  $\vec{\tau}_v = -\eta \frac{d\vec{u}}{dz} e_x$ .
- II.B.7.b Effectuer un bilan thermodynamique sur le film d'eau, et remarquer que le travail de la force de frottement qu'exerce la glace sur le film est nul.

### Partie III

- III.A Quelle est la masse d'eau correspondant à une élévation du film de  $dh$  ?
- III.B.1.b Les termes dits « diffusifs » sont les termes

$$\eta \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right)$$

- III.B.2 Intégrer en  $z$  l'équation obtenue à la question III.B.1.e.
- III.C.2  $h_{\text{lim}}$  correspond à la valeur de  $h$  pour laquelle les deux termes du membre de droite de l'équation (III.2) se compensent.
- III.C.3 Utiliser le résultat de la question II.B.4.

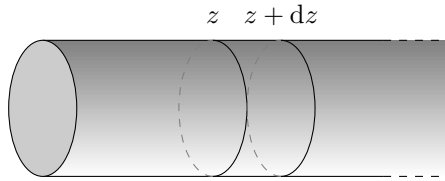
### Partie IV

- IV.B.1 Les jonctions étant identiques, l'aire de contact est  $A = N\pi r_0^2$ .
- IV.B.3.c Chercher dans un premier temps l'expression de l'aire de la jonction que forme une aspérité dont le sommet est initialement en  $z$ .
- IV.B.3.f Utiliser le fait que  $R_x = \tau_c A$  et exprimer  $A$  en fonction de  $R_z$ .

## I. EFFETS THERMIQUES AUX JONCTIONS

### I.A Diffusion thermique dans un milieu semi-infini

**I.A.1** Considérons une tranche de solide infinitésimale située entre  $z$  et  $z + dz$ , et appliquons-lui le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .



Le solide étant indéformable, le travail des forces de pression est nul et le 1<sup>er</sup> principe s'écrit

$$dU = \delta Q$$

Il peut sembler surprenant d'utiliser la relation  $dU = \delta Q$ , étant donné que les transformations thermodynamiques se font ici à pression constante, ce qui implique  $dH = \delta Q$ . Cependant, il faut garder à l'esprit que ces transformations se font également à volume constant (solide indéformable), si bien que le terme  $PV$  de la relation  $H = U + PV$  est une constante. Dans ce cas précis, on a donc bien  $dH = dU$ .

La variation infinitésimale d'énergie interne s'exprime comme

$$dU = s dz \rho c \times (T(t + dt) - T(t)) = s dt dz \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le transfert thermique infinitésimal  $\delta Q$  est reçu par conduction à travers les sections circulaires en  $z$  et  $z + dz$ , et est égal au flux du vecteur  $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$  à travers ces sections pendant  $dt$ , d'où

$$\delta Q = -s dt \lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z}(z) + s dt \lambda(z + dz) \frac{\partial T}{\partial z}(z + dz) = s dt dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

L'écriture du 1<sup>er</sup> principe mène donc à l'équation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Par ailleurs,  $T_0$  étant une constante, soustraire cette quantité à  $T$  au sein de dérivées ne modifie pas l'équation. On obtient alors, dans le cas général où  $\lambda$  dépend de  $T$  (et donc de  $z$ ),

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

et, dans le cas où  $\lambda$  ne dépend pas de  $T$ ,

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

**I.A.2.a** Pour  $t < -\delta t$ , le solide n'a pas encore été chauffé. Il reste donc dans son état d'équilibre initial où  $T(z, t)$  vaut  $T_0$  pour tout  $z$ , soit

$$\delta\theta(z, t) = 0$$

**I.A.2.b** Vérifions que la fonction proposée satisfait effectivement l'équation établie à la question I.A.1. Le calcul des dérivées partielles de  $\delta\theta(z, t)$  conduit à

$$\frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = -\frac{B \delta t}{2 t \sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) + \frac{B z^2 \delta t}{4 \mathcal{D} t^2 \sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$$

$$\frac{\partial \delta\theta}{\partial z} = -\frac{B z \delta t}{2 \mathcal{D} t \sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial z^2} = -\frac{B \delta t}{2 \mathcal{D} t \sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) + \frac{B z^2 \delta t}{4 \mathcal{D}^2 t^2 \sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$$

Étant donné que  $\mathcal{D} = \lambda/(\rho c)$ ,  $\delta\theta$  vérifie bien l'équation

$$\rho c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial z^2}$$

**I.A.2.c** Entre  $t_1$  et  $t_2$ , le solide reçoit la densité de flux thermique  $j_0$  pendant  $\delta t$ . Le transfert thermique qu'il reçoit est donc  $Q = j_0 s \delta t$ , et l'application du 1<sup>er</sup> principe conduit à

$$\Delta U = Q = j_0 s \delta t$$

Il est par ailleurs possible de calculer directement la variation d'énergie interne à partir du profil de température  $T(z, t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(t_2) - U(t_1) \\ &= s \rho c \int_0^\infty (T(z, t_2) - T(z, t_1)) dz \\ &= s \rho c \int_0^\infty \delta\theta(z, t_2) dz \\ &= s \rho c \frac{B \delta t}{\sqrt{t_2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t_2}\right) dz \\ &= s \rho c \frac{B \delta t}{\sqrt{t_2}} 2\sqrt{\mathcal{D}t_2} \int_0^\infty \exp(-u^2) du \quad \text{avec } u = \frac{z}{2\sqrt{\mathcal{D}t_2}} \\ \Delta U &= s \rho c B \delta t \sqrt{\mathcal{D}\pi} \quad \text{d'après le formulaire de l'énoncé} \end{aligned}$$

Bien que l'expression de  $\delta\theta(z, t_2)$  dépende de  $t_2$ , l'expression finale de  $\Delta U$  n'en dépend pas. On pouvait s'attendre à cela puisque le système ne reçoit plus d'énergie après  $t = 0$ , ce qui implique que son énergie interne reste constante pour tout  $t_2 \geq 0$ .

En imposant que les deux expressions obtenues pour  $\Delta U$  soient égales, on obtient

$$B = \frac{j_0}{\rho c \sqrt{\mathcal{D}\pi}}$$

## Centrale Physique et Chimie PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur agrégé) et Fabrice Maquère (Professeur agrégé) ; il a été relu par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE), Stéphane Ravier (Professeur en CPGE), Anna Venancio-Marques (ENS Lyon) et Laure-Lise Chapellet (ENS Lyon).

---

Ce sujet, composé de quatre parties indépendantes, traite de la physique puis de la chimie du piano.

- La partie I est consacrée à l'étude des vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités. On détermine l'équation de propagation de l'onde, puis on étudie les modes propres d'une corde sans raideur. On envisage ensuite brièvement les conséquences sur la fabrication d'un piano. Finalement, la prise en compte de la raideur permet d'arriver à la dispersion et à l'inharmonicité d'une onde.
- L'étude du couplage du piano avec la table d'harmonie est réalisée dans la partie II. En partant de l'impédance caractéristique d'une corde vibrante, on détermine la forme de l'onde en prenant en compte le couplage. Là aussi, le cours sur les ondes suffit à traiter cette partie.

La partie chimie s'intéresse aux matériaux utilisés pour fabriquer les cordes et les touches d'un piano.

- La partie III porte sur les cordes. Elle commence par l'étude cristallographique de l'acier qui les constitue avec une étude complète des sites interstitiels. Le sujet se focalise ensuite sur le cuivre utilisé pour les cordes de grave et plus particulièrement sur l'obtention électrochimique de ce métal. Enfin, la corrosion des cordes en acier en présence d'air humide est abordée.
- La partie IV s'intéresse à l'obtention des polymères synthétiques utilisés pour la fabrication des touches : l'élaboration du monomère utilise une réaction d'addition sur une liaison double  $C=C$ , qui est étudiée d'un point de vue mécanistique, tandis que la polymérisation permet de calculer un indice de polymérisation.

Ce sujet demandait avant tout une connaissance précise du cours et une familiarité avec les applications classiques. Il vous permettra de vérifier que vous avez assimilé les chapitres associés.

## INDICATIONS

### Partie I

I.A.2 L'approximation des petits angles permet d'écrire

$$\tan \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t)$$

Puis écrire le principe fondamental de la dynamique pour l'élément de masse  $dm \simeq \mu dx$ .

I.B.1 Remplacer l'expression d'une onde stationnaire dans l'équation de propagation et étudier les différents cas en fonction de la valeur de la constante.

I.B.3.a Le timbre est modifié par la présence du sinus cardinal. Cet effet est d'autant plus marqué que le sinus cardinal de variable  $n\pi a/L$  est proche de zéro.

I.B.3.b Là où le marteau frappe, il ne peut y avoir de nœud de vibration.

I.D.1.c Exprimer les vecteurs  $\vec{GA}$  et  $\vec{GB}$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  en fonction de  $dx$  et  $dy$ .

I.D.2.d Faire un développement limité à l'ordre 1 en  $Bn^2$ .

### Partie II

II.B.2 Utiliser la relation de la question I.A.2 :

$$T_y(x, t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

puis faire apparaître  $v_y(x, t)$  et calculer cette relation en  $x = L$ .

II.B.3  $\alpha$  est lié à la proportion de l'onde transmise au chevalet.

II.B.5 Faire apparaître la fréquence  $f$  dans l'expression de  $\alpha$ .

### Partie III

III.A.1.b La figure 2 représente 2 mailles conventionnelles juxtaposées.

III.A.1.f En plus du site identifié par l'énoncé, il existe des sites octaédriques au centre des arêtes, ainsi que plusieurs sites tétraédriques sur les faces.

III.A.2.a Raisonner uniquement sur les rayons  $R_{O'}$  et  $R_{T'}$  établis à la question III.A.1.g et à la question III.A.1.h.

III.A.2.b Raisonner sur une maille conventionnelle.

III.B.1.a Comme pour les configurations électroniques des ions des éléments de transition, il y a une inversion de deux niveaux d'énergie par rapport à la règle de Klechkowski.

III.B.1.b Tous les éléments du bloc  $d$  de la classification périodique ne sont pas des éléments de transition : il y a des exceptions.

III.B.2.c Il faut utiliser un montage à 3 électrodes.

III.B.2.d Faire un bilan des espèces présentes et électroactives.

III.B.2.e L'oxydation est rapide ou lente ? La réduction ?

III.B.2.f Identifier le phénomène limitant.

- III.B.2.h Calculer la différence des potentiels d'oxydoréduction des couples mis en jeu. Pour le calcul de l'énergie, exprimer au préalable, la charge échangée au cours de l'électrolyse en fonction de la masse de cuivre déposé.
- III.C.2  $C_{\text{tra}}$  peut être déterminée à partir de la frontière entre les domaines B et C,  $K_s$  à partir de la frontière entre A et D, et la pente de la frontière B/D graphiquement.
- III.C.3 Seule la pente a besoin d'être calculée, la droite peut être placée sur le diagramme par continuité.
- III.C.4 Une solution aérée contient du dioxygène dissous.
- III.C.6 Le contact fer-cuivre forme une micropile.

#### Partie IV

- IV.A.2.c Le chlore ne peut pas former d'ion ponté dans le mécanisme d'addition du dichlore sur une liaison double.
- IV.A.3 Attention à la formation d'un composé méso, achiral.

## I. VIBRATIONS D'UNE CORDE DE PIANO FIXÉE À SES DEUX EXTRÉMITÉS

### I.A Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

**I.A.1** Une corde sans raideur signifie qu'elle n'offre aucune résistance à la courbure, **la tension de la corde est donc toujours tangente à la corde**. Dans ce cadre, on étudie le mouvement dans le cas de petits mouvements, c'est-à-dire que **l'angle que fait la corde avec l'axe horizontal est très petit devant l'unité**.

**I.A.2** On s'intéresse à une perturbation  $y(x, t)$  qui se propage. Ainsi, par définition de cette dernière,  $\partial y / \partial x \ll 1$ . La longueur  $ds$  de l'élément de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  vaut donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

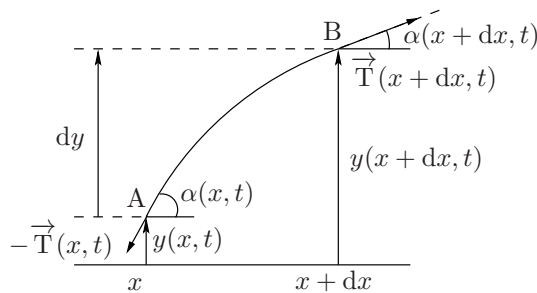
Comme  $\partial y / \partial x \ll 1$ , en se limitant à l'ordre 1 en  $\partial y / \partial x$ , on obtient  $ds \simeq dx$ . En notant  $\mu$  la masse linéique de la corde, la masse  $dm$  de la portion de câble de longueur  $ds$  s'écrit

$$dm = \mu ds \simeq \mu dx$$

Le poids étant négligé, l'élément de corde, de longueur  $ds \simeq dx$ , de masse  $dm \simeq \mu dx$ , est soumis à :

- la tension de la portion de fil située à droite du point B, soit  $\vec{T}(x + dx, t)$  ;
- la tension de la portion de fil située à gauche du point A, soit  $-\vec{T}(x, t)$ .

La portion de câble est schématisée comme suit :



Le mouvement de la corde ayant lieu selon  $Oy$ , le principe fondamental de la dynamique appliqué à cet élément de corde s'écrit

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

Projetons cette équation sur les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  :

$$\begin{cases} 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) \\ dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) \end{cases}$$

## Mines Physique 1 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bruno Salque (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Le sujet porte sur l'étude d'un procédé de modulation de la lumière appelé modulation acousto-optique (MAO).

- Dans la première partie du problème, on étudie le principe de propagation d'une onde acoustique dans un milieu compressible. Contrairement au cas habituel du cours, l'approximation acoustique, postulant la linéarité de la relation de dispersion, n'est pas introduite au début du raisonnement.
- Dans la deuxième partie, nécessitant plus de maîtrise des calculs, on travaille sur un modèle de modulateur acousto-optique avec la propagation d'ondes électromagnétiques sur un milieu isolant à indice optique variable. Cette variation d'indice est induite par des ondes acoustiques propagées dans le milieu.
- Enfin, on s'intéresse dans la troisième partie à l'utilisation d'un dispositif de MAO : la méthode de détection hétérodyne. Les nœuds et ventres des ondes acoustiques dans le milieu constituent un réseau qui diffracte les ondes lumineuses tout en modifiant leurs phases et leurs fréquences. En superposant l'ordre 0 et l'ordre 1 du signal lumineux, on identifie les variations de chemin optique entre les deux ordres. Un tel dispositif permet, par exemple, de mesurer des déplacements très petits devant la longueur d'onde de la source laser utilisée. Des notions de traitement du signal sont abordées dans les dernières questions.

Ce problème, d'une difficulté raisonnable, permet de tester ses connaissances sur l'acoustique et l'optique ondulatoire. Les calculs doivent être soignés pour pouvoir terminer ce sujet.

**INDICATIONS****Partie I**

- 1 Adopter un point de vue lagrangien et traduire la constance de la masse d'une tranche du milieu.
- 2 Faire un bilan de quantité de mouvement sur une tranche de fluide.
- 3 On rappelle la définition de  $\chi_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_s$ .
- 5 Utiliser les lois de Laplace pour exprimer  $\chi_s$  en fonction de  $\gamma$  et  $p$ .

**Partie II**

- 6 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss.
- 7 Ne pas oublier le déphasage de  $\pi$  pour la réflexion d'une onde électromagnétique.
- 8 Utiliser la loi de Maxwell-Faraday et la continuité du champ.
- 9 Utiliser le développement limité  $\sin(a + \delta a) = \sin(a) + \delta a \cos(a)$ .
- 10 Se rappeler que  $\tan^2 \theta + 1 = 1/\cos^2 \theta$ .
- 12 Utiliser le théorème de Malus sur deux rayons arrivant en  $z = 0$  et en  $z > 0$ .
- 13 Développer  $\sin(\Omega t - K z)$  en exponentielles complexes.
- 14 Où la fonction sinus cardinal atteint-elle son maximum ?
- 16 Comparer la valeur du terme croisé par rapport aux autres.

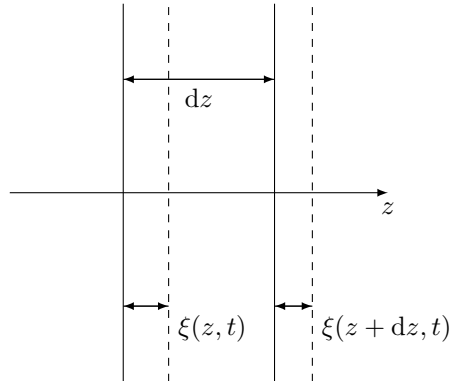
**Partie III**

- 17 « Hétéro » signifie « différent ».
- 18 Utiliser la formule  $I = |\underline{A}_0 + \underline{A}_1|^2$ .
- 20 Utiliser  $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ .
- 21 Par définition du décibel :  $20 \log(S_1/S_0) = -60$ .

## MODULATION ACOUSTO-OPTIQUE

### I. ONDES ACOUSTIQUES DANS UN MILIEU COMPRESSIBLE

**1** Effectuons un bilan de masse dans le système fermé suivant : une tranche du milieu au repos, placée entre  $z$  et  $z + dz$ . À l'instant  $t$ , cette tranche se déforme et ses limites sont  $z + \xi(z, t)$  et  $z + dz + \xi(z + dz, t)$ .



En notant  $dm$  la masse de cette tranche, il vient :

$$dm = \rho_0 S dz = \rho(z, t) S [dz + \xi(z + dz, t) - \xi(z, t)]$$

Avec le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\xi(z + dz, t) = \xi(z, t) + \frac{\partial \xi}{\partial z}(z, t) dz$ , on arrive à

$$dm = \rho(z, t) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z}(z, t) + 1 \right) S dz$$

soit la relation demandée après simplification par  $S dz$ ,

$$\boxed{\rho_0 = \rho(z, t) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z}(z, t) + 1 \right)}$$

Attention à ne pas utiliser l'équation eulérienne de la conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

qui ne permet pas de trouver la relation entre  $\rho$  et  $\rho_0$ .

**2** Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une tranche de fluide de masse  $dm = \rho_0 S dz$ . Les forces qui s'appliquent sont uniquement les forces de pression en amont et en aval de la tranche.

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = SP(z, t) \vec{e}_z - SP(z + dz, t) \vec{e}_z$$

$$\rho_0 S dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} S dz \vec{e}_z$$

Projetons la relation précédente selon  $\vec{e}_z$ , en simplifiant par  $S dz$ , on arrive à

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(z, t) = - \frac{\partial P}{\partial z}(z, t)$$

**3** Travaillons sur le terme  $\partial P / \partial z$  en faisant apparaître le coefficient de compressibilité isentropique du milieu  $\chi_s$ .

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial P}$$

Utilisons l'expression de  $\rho$  trouvée à la question 1 :

$$\chi_s = \frac{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial P}$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}{\chi_s \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} \right) = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}$$

En réinjectant dans l'expression obtenue dans la question précédente, on trouve bien

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}$$

La relation obtenue indique, par son caractère non linéaire, une propagation dispersive des ondes acoustiques.

**4** Négligeons le terme en  $\partial \xi / \partial z$  devant 1 et dérivons par rapport à  $t$  cette équation :

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} = \frac{1}{\chi_s \rho_0} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial z^2}$$

Comme  $v = \partial \xi / \partial t$ , il vient bien

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}}$$

La forme générale de la vitesse d'une onde acoustique, pour une propagation dans le sens des  $z$  croissants avec un vecteur d'onde  $\vec{K} = K \vec{e}_z$ , de pulsation  $\Omega$  et d'amplitude  $v_0$ , est

$$v(z, t) = v_0 \sin(\Omega t - K z + \varphi)$$

en notant  $\varphi$  la phase à l'origine. Si l'on réinjecte cette expression dans l'équation de propagation précédente, on trouve, après simplification par  $v_0$ ,

$$\frac{\Omega^2}{c_0^2} = K^2$$

soit

$$|K| = \Omega \sqrt{\chi_s \rho_0}$$

## Mines Physique 2 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) ; il a été relu par Victor Bertrand (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet propose d'étudier le fonctionnement d'une éolienne à axe vertical, dite de Darrieus, et d'un onduleur couplé à l'éolienne.

- La première partie, la plus longue, étudie le principe du transfert mécanique de la puissance du vent aux pales de l'éolienne. À partir de l'équation d'Euler, on utilise le théorème de Bernoulli afin de trouver des relations entre les grandeurs du problème. Au niveau des discontinuités de pression engendrées par les pales, un bilan de quantité de mouvement permet de trouver une nouvelle relation. On établit ensuite la force qu'exerce le vent sur les pales. Cette force étant connue, il est alors possible de remonter au moment exercé par le vent sur l'axe de l'éolienne puis d'en déduire la puissance mécanique disponible. Enfin, quelques estimations d'ordre de grandeur sont proposées afin d'estimer le rendement du dispositif.
- La seconde partie traite du principe de l'onduleur. À partir d'une tension continue, on cherche à générer un courant alternatif afin de pouvoir l'injecter dans le réseau électrique. L'énoncé propose dans un premier temps de générer un signal créneau à partir d'un hacheur quatre quadrants. Dans un second temps, on se rapproche d'un signal sinusoïdal par la mise en parallèle d'une inductance avec la résistance de charge. Dans cette partie, l'analyse spectrale tient une place importante.

De difficulté et de longueur raisonnables, ce sujet comporte quelques questions d'interprétation physique délicates. Les premières questions sont plus difficiles et exigent un recul suffisant sur le cours d'hydrodynamique pour être abordées sereinement. La suite du problème est en revanche guidée et peut être faite sans avoir répondu aux premières questions.

## INDICATIONS

### Partie I

- 2 Penser à l'influence sur la vitesse d'écoulement d'une perte d'énergie du fluide lors de son passage dans l'éolienne.
- 4 Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie.
- 5 Introduire un système ouvert fixe. La stationnarité de l'écoulement permet alors d'annuler la dérivée temporelle de la quantité de mouvement relative à ce système.
- 6 Pour une pression homogène, la résultante des forces de pression sur un solide est nulle quelle que soit sa forme.
- 10 Exprimer  $\vec{v}_u$  dans la base  $(\vec{n}, \vec{t})$ .
- 12 Utiliser la relation  $\cos^2 \alpha_u + \sin^2 \alpha_u = 1$  afin d'exprimer  $v_\infty/W_u$ . Utiliser la calculatrice pour montrer que l'angle  $\alpha_u$  reste inférieur à  $15^\circ$ .
- 13 Utiliser la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant.
- 14 Dans l'expression de  $T_u$  fournie par l'énoncé, exprimer  $dA_u$  à l'aide des questions précédentes.
- 15 Intégrer le moment induit par la force élémentaire  $\vec{F}_u$  sur le cylindre éolien.
- 16 Les intégrales utilisent respectivement les jeux de variables  $(\theta, \varphi)$  et  $(\varphi, \theta)$ . La relation proposée entre  $\theta$  et  $\varphi$  à la question 14 assure l'égalité  $\theta = \varphi$ . Cette identité des variables permet alors de regrouper les intégrales afin d'obtenir la relation proposée.
- 17 En l'absence d'éolienne, la vitesse du vent est égale à  $v_\infty$  sur toute la longueur d'un tube de courant.
- 19 Raisonner sur la condition nécessaire pour obtenir  $C_{T_u} > 0$ .

### Partie II

- 23 Utiliser les conditions de fonctionnement des sources parfaites pour en déduire des positions interdites des interrupteurs.
- 24 Utiliser l'absence de boucle de rétroaction négative pour conclure.
- 28 La tension d'alimentation du circuit RL est constante par morceaux. Utiliser les indications de l'énoncé sur les valeurs de l'intensité en  $t = 0$  et en  $t = T_p/2$  permet de conclure plus aisément :

$$i_s(t = 0) = -I \quad \text{et} \quad i_s\left(t = \frac{T_p}{2}\right) = +I$$

- 30 Remarquer que le courant change de signe lors d'un même mode de fonctionnement.

# ÉNERGIE ÉOLIENNE

## I. ÉOLIENNE DE TYPE DARRIEUS

**1** Le nombre de Reynolds  $Re$  est une grandeur adimensionnée qui représente, pour un écoulement donné, le rapport entre les flux advectif et diffusif de quantité de mouvement. Il permet de caractériser le régime de l'écoulement (visqueux ou laminaire). Il est nécessaire de se donner une taille caractéristique et une échelle de vitesse pour le définir. Il semble judicieux de prendre le rayon de l'éolienne  $R$ , puisque c'est lui qui donne l'échelle de l'écoulement. Ainsi,

$$Re = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\rho U^2 / R}{\eta U / R^2}$$

Par conséquent,

$$\boxed{Re = \frac{\rho UR}{\eta} \simeq 6 \cdot 10^6}$$

Puisque  $Re \gg 1$ , les forces de viscosité sont négligeables, donc l'écoulement peut légitimement être considéré comme parfait loin des parois.

Le terme de viscosité est alors négligé dans l'équation de Navier-Stokes. Cette nouvelle équation est appelée équation d'Euler ; elle est valable dans le cas des fluides parfaits.

**2** L'éolienne est un système mécanique qui convertit l'énergie du vent en énergie mécanique de ses pales. De l'énergie est donc soustraite au flux d'air la traversant. Par conséquent, l'air a perdu de l'énergie lors du passage dans l'éolienne. Dans une bonne approximation, le passage du vent dans l'éolienne est adiabatique. De plus, le flux d'air étant horizontal, il est iso-potentiel. Seule de l'énergie cinétique est donc perdue par l'air. Ainsi, la vitesse de l'air en aval est inférieure à celle en amont :  $\|\vec{v}_w\| < \|\vec{v}_\infty\|$ .

L'écoulement étant de plus supposé incompressible, il y a conservation du débit volumique, ce qui impose l'élargissement des tubes de courant au passage de l'éolienne et donc l'écartement des lignes de courant comme suggéré par le schéma de l'énoncé.

**3** Le fluide étant parfait d'après la question 1, et l'écoulement étant de plus considéré comme stationnaire et incompressible, il est possible d'appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant. L'énergie de pesanteur peut de plus être négligée (sa variation serait de toute façon nulle, les lignes de courant étant iso-hauteur). Le théorème de Bernoulli s'écrit alors simplement

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = C^{\text{te}}$$

Ainsi, de  $-\infty$  à  $u^+$ ,

$$\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v_u^2}{2} + \frac{P_{u^+}}{\rho}$$

et de  $u^-$  à  $A$ ,

$$\frac{v_u^2}{2} + \frac{P_{u^-}}{\rho} = \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_0}{\rho}$$

d'où

$$\boxed{P_{u^+} - P_{u^-} = \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v_A^2)}$$

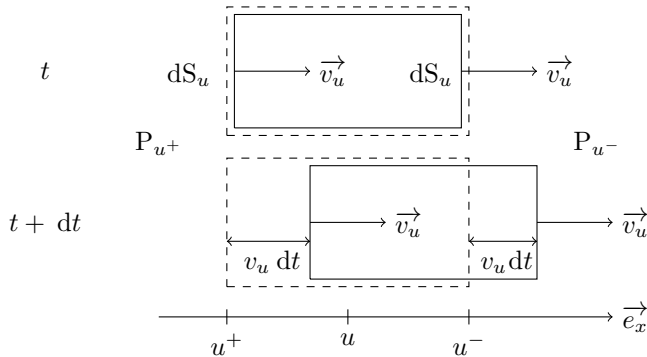
**4** Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique du fluide lors de son mouvement. Or, lors de son passage à proximité du cylindre éolien, il y a transfert d'énergie entre le vent et les pales de l'éolienne (sinon l'éolienne ne pourrait pas être mise en rotation). Il n'y a donc pas conservation de l'énergie dans cette zone.

Le théorème de Bernoulli pourrait s'appliquer, mais dans une version généralisée qui contiendrait un terme de transfert entre le fluide et le système mécanique. Ce terme étant inconnu, cela ne permettrait pas de conclure plus aisément.

**5** Dans les deux questions suivantes, les grandeurs faisant référence au système fermé auront une étoile en exposant. Notons  $\vec{F}$  la force totale s'exerçant sur le système fermé. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire

$$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{F}$$

avec  $\vec{p}^*$  la quantité du mouvement du système fermé considéré.



Introduisons le système ouvert (en traits pointillés) coïncidant avec le système fermé (en traits pleins) considéré à l'instant  $t$ . À cet instant, les quantités de mouvement du système ouvert et du système fermé vérifient

$$\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t)$$

À l'instant  $t + dt$ , ces deux quantités ne coïncident plus. Elles diffèrent du flux de quantité de mouvement.

$$\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + d\vec{p}^- - d\vec{p}^+$$

avec  $d\vec{p}^-$  la quantité de mouvement ayant quitté le système ouvert et  $d\vec{p}^+$  celle étant rentrée pendant l'instant  $dt$ . Ces flux de quantité de mouvement s'écrivent, en notant  $\vec{v}_{u-}$  et  $\vec{v}_{u+}$  les vitesses du fluide respectivement en amont et en aval du point  $u$ ,

$$\begin{cases} d\vec{p}^- = (\rho v_{u-} dt dS_u) \vec{v}_{u-} \\ d\vec{p}^+ = (\rho v_{u+} dt dS_u) \vec{v}_{u+} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \rho dS_u (v_{u-} - v_{u+})$$

## Mines Chimie PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Mickaël Profeta (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Fabrice Maquère (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Comme c'est généralement d'usage pour l'épreuve de chimie de la filière PSI au concours des Mines, ce sujet s'intéresse à un élément. Cette année, le plomb est à l'honneur. Le sujet traite essentiellement d'oxydoréduction et est divisé en six parties.

- On commence par une très rapide étude structurale avec une justification qualitative de la masse molaire du plomb, puis vient un calcul relatif aux énergies d'ionisation et on termine par l'écriture d'une maille cristalline et de la masse volumique du plomb.
- La deuxième partie traite du diagramme d'Ellingham du plomb. On aborde les questions classiques concernant les nombres d'oxydation du plomb dans ses oxydes et l'attribution des domaines dans le diagramme. On utilise ensuite le tracé fourni pour déterminer l'enthalpie standard de fusion du plomb ainsi que la nature de l'oxyde formé lors d'une oxydation par l'air.
- La troisième partie aborde le diagramme potentiel-pH du plomb. Celui-ci est donné et l'on commence par attribuer les différents domaines. Viennent ensuite deux calculs pour déterminer l'équation d'une des droites frontières ainsi que le produit de solubilité de PbO.
- La quatrième partie étudie l'accumulateur au plomb qui constitue l'immense majorité des batteries que l'on utilise dans les véhicules. L'accumulateur représente d'ailleurs les 3/4 de la consommation mondiale de plomb. On établit son schéma de fonctionnement ainsi que les réactions intervenant aux électrodes. On réutilise le diagramme potentiel-pH pour déterminer des potentiels standard d'oxydoréduction ainsi que la force électromotrice de l'accumulateur.
- La cinquième partie concerne le dosage des ions  $\text{Pb}^{2+}$  présents dans une peinture. Le dosage est mené par titrage rédox. C'est l'occasion d'écrire des bilans d'oxydoréduction, de calculer une constante d'équilibre pour une réaction et enfin de déterminer la concentration en ions  $\text{Pb}^{2+}$  dans la peinture.
- La dernière partie traite de chimie organique et plus particulièrement de stéréochimie. On détermine la configuration absolue de deux atomes de carbone asymétriques et l'on représente les différents stéréoisomères d'une molécule. On utilise ensuite les indications de l'énoncé sur l'utilisation du tétra-acétate de plomb pour réaliser la coupure oxydante d'un diol.

Cette épreuve, si elle reste dans le strict cadre du programme, est beaucoup plus difficile que les années précédentes. Aucune question n'est réellement piégeuse mais l'énoncé est assez complexe. Signalons d'ailleurs que la présence de l'erratum ne facilite pas sa lecture, la version initiale du protocole mis en œuvre lors du dosage étant totalement incompréhensible. Elle nécessite une bonne maîtrise de l'oxydoréduction et un recul qu'il est difficile de posséder en filière PSI. Le jury a sûrement été sensible à cette situation pour valoriser les candidats qui ont fait preuve de clarté et de simplicité. Avoir une très bonne note à cette épreuve est tout à fait accessible pour quiconque n'a pas lâché la matière durant l'année. S'entraîner sur les épreuves des années précédentes reste très efficace dans cette filière car les thèmes abordés sont très souvent identiques d'une année sur l'autre.

## INDICATIONS

### Partie A

- 1 Le noyau contient des protons mais aussi des neutrons. Pour les noyaux lourds, il y a plus de neutrons que de protons.
- 2 Ne pas oublier l'état physique associé à l'ionisation. Attention, la deuxième ionisation se produit à la suite de la première.
- 3 Les ions sont tangents sur la diagonale du cube. Exprimer le paramètre de maille  $a$  en fonction de  $r_+$  et  $r_-$ .
- 4  $\text{Pb}_3\text{O}_4$  est un oxyde mixte : le plomb a deux états d'oxydation différents.

### Partie B

- 5 Placer les espèces par degré d'oxydation croissant.
- 6 Il ne suffit pas de soustraire les ordonnées à l'origine. Écrire la combinaison linéaire entre les réactions d'oxydation du plomb solide, liquide et la réaction de fusion.
- 7 Il y a 20 % de dioxygène dans l'air. Placer le point correspondant dans le diagramme.

### Partie C

- 8 Écrire les équations acido-basiques pour trouver les espèces les plus basiques.
- 10 Écrire la réaction avec l'eau pour la dissolution de  $\text{PbO}_{(s)}$ .

### Partie D

- 11 Déterminer l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort à l'aide du diagramme potentiel-pH.
- 12 Écrire les potentiels de Nernst pour les deux couples. L'ordonnée à l'origine n'est pas égale au potentiel standard !
- 13 Dans le milieu considéré, l'acide sulfurique est quasi-pur. L'activité des ions sulfate est égale à 1 et non à leur concentration.  
Exprimer la force électromotrice en fonction des potentiels des couples. En présence de précipité  $\text{PbSO}_{4(s)}$ , il y a aussi les ions  $\text{Pb}^{2+}$ .

### Partie E

- 15 Ne pas oublier la dilution de  $\text{I}^-$ .
- 16  $\text{Cr}^{3+}$  est oxydé en  $\text{CrO}_4^{2-}$  puis vient la précipitation de  $\text{PbCrO}_{4(s)}$ .
- 17 Le dosage est l'oxydation de  $\text{Fe}^{2+}$  par  $\text{CrO}_4^{2-}$ .
- 18 La dissolution de  $\text{PbCrO}_{4(s)}$  pour former la solution S produit autant d'ions  $\text{Pb}^{2+}$  que d'ions  $\text{CrO}_4^{2-}$  que l'on dose.

### Partie F

- 20 La molécule présente un plan de symétrie, il n'y a pas 4 stéréoisomères.

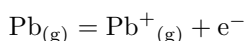
## LE PLOMB

### A. Étude structurale

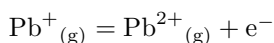
**1** Le noyau des atomes est constitué de  $Z$  (numéro atomique) protons et de  $(A - Z)$  neutrons, avec  $A$  le nombre de masse. La masse molaire est environ égale à  $A \text{ g.mol}^{-1}$ . Pour les noyaux très lourds, comme c'est le cas pour le plomb, il y a plus de neutrons que de protons pour assurer la stabilité, de sorte que l'on attend une masse molaire supérieure à  $2Z = 164 \text{ g.mol}^{-1}$ , ce qui est bien le cas ici.

**2** L'énergie de première ionisation est l'énergie minimale à fournir pour arracher un électron à l'atome gazeux. L'énergie de deuxième ionisation est l'énergie minimale à fournir à l'ion obtenu (toujours gazeux) pour arracher un deuxième électron.

Les équations des réactions correspondantes sont :



et



L'énergie associée à un rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$  est

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

soit, pour une mole,

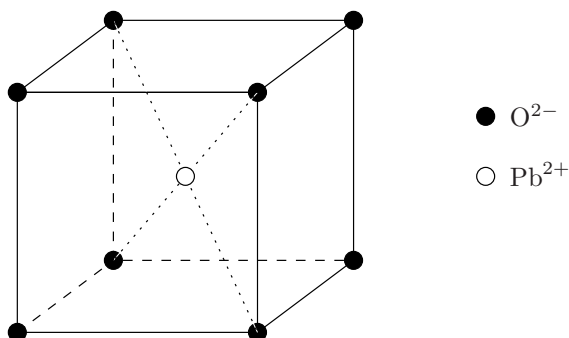
$$E = 9 \cdot 10^2 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

On a donc

$$715 \text{ kJ.mol}^{-1} < E < 1450 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

**On peut observer la première ionisation mais pas la deuxième.**

**3** La structure de la maille est



Dans cette maille, il y a 1 cation  $\text{Pb}^{2+}$  et un anion  $\text{O}^{2-}$  :

$$N_{\text{Pb}^{2+}} = 1 \times 1 = 1 \quad \text{et} \quad N_{\text{O}^{2-}} = 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

| On vérifie que l'on retrouve bien la stoechiométrie de l'oxyde  $\text{PbO}$ .

Il y a contact entre les ions sur la diagonale du cube :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = r_+ + r_-$$

d'où 
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_+ + r_-)$$

La masse volumique peut s'écrire pour une maille :

$$\rho = \left(\frac{m}{V}\right)_{\text{maille}} = \frac{N_{\text{Pb}^{2+}} \times M_{\text{Pb}} + N_{\text{O}^{2-}} \times M_{\text{O}}}{\mathcal{N}_A a^3}$$

soit

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}(M_{\text{Pb}} + M_{\text{O}})}{8\mathcal{N}_A (r_+ + r_-)^3}$$

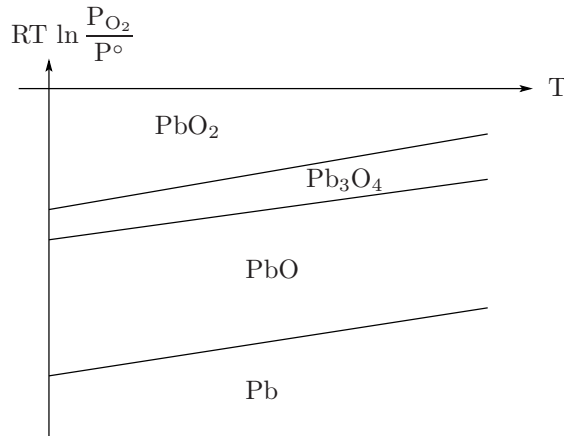
4 Le nombre d'oxydation de l'oxygène étant  $-II$  dans ces oxydes, on a pour le plomb les états d'oxydation suivants :

$$\text{PbO} : +II \quad \text{Pb}_3\text{O}_4 : +\frac{8}{3} \quad \text{PbO}_2 : +IV$$

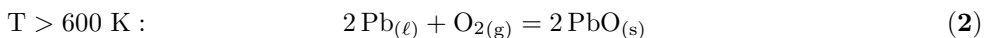
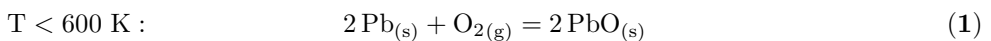
Pour  $\text{Pb}_3\text{O}_4$ , il s'agit d'un degré d'oxydation moyen sur les trois atomes de plomb. On a en réalité 2 atomes au degré  $+II$  et 1 au degré  $+IV$ . On dit que  $\text{Pb}_3\text{O}_4$  est un oxyde mixte.

### B. Oxydes de plomb : diagramme d'Ellingham

5 Dans un diagramme d'Ellingham, les espèces les plus oxydées se situent au-dessus des espèces les moins oxydées. On obtient alors, par degré d'oxydation croissant du plomb, les domaines suivants :



6 Pour déterminer l'enthalpie standard de fusion du plomb, on combine les réactions d'oxydation sèche et de fusion.



On rappelle que les équations d'oxydation en phase sèche s'écrivent conventionnellement avec un nombre stœchiométrique 1 pour le dioxygène.

## Constantes chimiques

### I Principaux indicateurs colorés de pH

	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
rouge de métacrésol	rouge	1,2 – 2,8	jaune
<b>hélianthine</b>	<b>rouge</b>	<b>3,1 – 4,4</b>	<b>jaune</b>
vert de bromocrésol	jaune	3,8 – 5,4	bleu
rouge de chlorophénol	jaune	4,8 – 6,4	rouge
<b>bleu de bromothymol</b>	<b>jaune</b>	<b>6,0 – 7,6</b>	<b>bleu</b>
rouge neutre	rouge	6,8 – 8,0	jaune
rouge de crésol	jaune	7,2 – 8,8	rouge
<b>phénolphtaléine</b>	<b>incolore</b>	<b>8,2 – 10,0</b>	<b>rouge violacé</b>
jaune d'alizarine R	jaune	10,0 – 12,1	rouge
carmin d'indigo	bleu	11,6 – 14	jaune

### II Principaux indicateurs colorés rédox

	Couleur de la forme oxydée	Potentiel standard à pH = 0 (en V)	Couleur de la forme réduite
<b>Fe II, 1-10 phénanthroline</b>	<b>bleu pâle</b>	<b>1,14</b>	<b>rouge</b>
Fe II, 2 – 2' bipyridyl	bleu très pâle	1,02	rouge
acide N phénylanthranilique	rouge pourpre	0,89	incolore
<b>acide diphénylamine- sulfonique</b>	<b>rouge violet</b>	<b>0,85</b>	<b>incolore</b>
diphénylamine	violet	0,76	incolore
<b>empois d'amidon</b>	<b>bleu</b>	<b>0,53</b>	<b>incolore</b>
bleu de méthylène	bleu	0,52	incolore

### III Valeurs de pKa les plus utiles

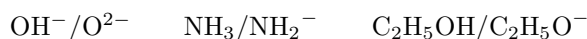
#### 1 Acides nivelés

Dans les couples suivants, l'acide est nivelé (il n'existe pas dans l'eau) et la base est indifférente (elle n'a pas d'action sur l'eau).



#### 2 Bases nivelées

Dans les couples suivants, la base est nivelée (elle n'existe pas dans l'eau) et l'acide est indifférent (il n'a pas d'action sur l'eau).



#### 3 Couples acide faible / base faible

	Acide	pKa	Base	
	H <sub>2</sub> O	14	OH <sup>-</sup>	
	HS <sup>-</sup>	13,0	S <sup>2-</sup>	
	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	12,7	PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	ion phosphate
	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	10,2	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	ion carbonate
phénol	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> OH	9,9	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> O <sup>-</sup>	ion phénolate
ion ammonium	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	9,2	NH <sub>3</sub>	ammoniac
acide hypobromeux	HBrO	8,7	BrO <sup>-</sup>	ion hypobromite
	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	7,2	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	
acide sulfhydrique	H <sub>2</sub> S	7,0	HS <sup>-</sup>	
	H <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	6,4	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	
	CH <sub>3</sub> COOH	4,7	CH <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	
	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH	4,2	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COO <sup>-</sup>	ion benzoate
acide nitreux	HNO <sub>2</sub>	3,4	NO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	ion nitrite
acide phosphorique	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	2,1	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	
	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1,9	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	
acide picrique	(NO <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> C <sub>6</sub> H <sub>2</sub> OH	0,4	(NO <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> C <sub>6</sub> H <sub>2</sub> O <sup>-</sup>	ion picrate
ion hydronium	H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	0	H <sub>2</sub> O	
EDTA	H <sub>4</sub> Y	2,0	H <sub>3</sub> Y <sup>-</sup>	
	H <sub>3</sub> Y <sup>-</sup>	2,7	H <sub>2</sub> Y <sup>2-</sup>	
	H <sub>2</sub> Y <sup>2-</sup>	6,2	HY <sup>3-</sup>	
	HY <sup>3-</sup>	10,2	Y <sup>4-</sup>	

## IV Potentiels standard des couples rédox courants

Les potentiels (en V) sont mesurés à pH = 0 par rapport à l'E.S.H.

$\text{Ag}^+/\text{Ag}_{(s)}$	0,80	$\text{I}_{2(s)}/\text{I}^-$	0,53
$\text{Al}^{3+}/\text{Al}_{(s)}$	-1,66	$\text{K}^+/\text{K}_{(s)}$	-2,93
$\text{Ba}^{2+}/\text{Ba}_{(s)}$	-2,90	$\text{Li}^+/\text{Li}_{(s)}$	-3,03
$\text{Be}^{2+}/\text{Be}_{(s)}$	-1,85	$\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}_{(s)}$	-2,37
$\text{Br}_{2(\ell)}/\text{Br}^-$	1,06	$\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}_{(s)}$	-1,19
$\text{BrO}_3^-/\text{Br}_{2(\ell)}$	1,52	$\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$	1,51
$\text{Ca}^{2+}/\text{Ca}_{(s)}$	-2,87	$\text{MnO}_{2(s)}/\text{Mn}^{2+}$	1,23
$\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}_{(s)}$	-0,40	$\text{HNO}_2/\text{NO}_{(g)}$	0,99
$\text{Cl}_{2(g)}/\text{Cl}^-$	1,40	$\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2$	0,94
$\text{HClO}_2/\text{HClO}$	1,64	$\text{Na}^+/\text{Na}_{(s)}$	-2,70
$\text{HClO}/\text{Cl}_{2(g)}$	1,63	$\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}_{(s)}$	-0,23
$\text{ClO}_4^-/\text{ClO}_3^-$	1,19	$\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	1,77
$\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$	-0,41	$\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$	-0,28
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$	1,33	$\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}_{(s)}$	-0,13
$\text{Cs}^+/\text{Cs}_{(s)}$	-2,95	$\text{PbSO}_{4(s)}/\text{Pb}_{(s)}$	-0,36
$\text{Cu}^+/\text{Cu}_{(s)}$	0,52	$\text{PbO}_{2(s)}/\text{Pb}^{2+}$	1,47
$\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_{(s)}$	0,34	$\text{PbO}_{2(s)}/\text{PbSO}_{4(s)}$	1,69
$\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}_{(s)}$	-0,44	$\text{HSO}_4^-/\text{H}_2\text{S}_{(g)}$	0,32
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	0,77	$\text{HSO}_4^-/\text{SO}_{2(g)}$	0,14
$\text{H}^+/\text{H}_{2(g)}$	0,00	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,09
$\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_{(\ell)}$	0,79	$\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$	-0,14
$\text{Hg}_2\text{Cl}_{2(s)}/\text{Hg}_{(\ell)}$	0,27	$\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}$	0,14
$\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$	0,91	$\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}_{(s)}$	-0,76

---

## Constantes physiques

---

Vitesse de la lumière	$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,19 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022\,04 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante gravitationnelle	$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314\,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96\,484 \text{ C.mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,380\,66 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,17 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109\,53 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,854\,19 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
<hr/>	
Masse du Soleil	$1,989\,1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la Terre	$5,973\,6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse de la Lune	$7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	696 000 km
Rayon de la Terre (équateur)	6 378,14 km
Rayon de la Lune (équateur)	1 737 km
Distance Soleil-Terre (demi grand axe)	149 597 870 km
Distance Terre-Lune (demi grand axe)	384 400 km

---

## Formulaire d'analyse vectorielle

---

### I Les systèmes de coordonnées

#### 1 Élément de volume

Coordonnées	$d\tau$
cartésiennes	$dx \times dy \times dz$
cylindriques	$dr \times r d\theta \times dz$
sphériques	$dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$

#### 2 Dérivation des vecteurs de la base

- En coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base sont constants : leurs dérivées par rapport à  $t$  sont nulles.
- En coordonnées cylindriques :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r \quad \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$$

- En coordonnées sphériques, la dérivation n'est pas utilisée car les dérivées ne sont pas simples.

### II Expressions des différentielles

Coordonnées	$dF$
cartésiennes	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) dz$
cylindriques	$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) dz$
sphériques	$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) d\varphi$

### III Expressions des opérateurs

#### 1 Le gradient

Coordonnées	$\vec{\text{grad}} f$
cartésiennes	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

## 2 La divergence

Coordonnées	$\operatorname{div} \vec{F}$		
cartésiennes	$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	+	$\frac{\partial F_y}{\partial y}$ + $\frac{\partial F_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r}$	+	$\frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$ + $\frac{\partial F_z}{\partial z}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r}$	+	$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta}$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

## 3 Le rotationnel

Coordonnées	$\operatorname{rot} \vec{F}$
cartésiennes	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_r$ $+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\varphi$

## 4 Le laplacien

Coordonnées	$\Delta f$
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \times \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

## 5 Le laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel est défini par la relation :

$$\Delta \vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{F}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

Il ne s'exprime simplement qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{F}(x, y, z, t) = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z$$

## IV Relations entre les opérateurs

Relations de compositions entre opérateurs :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Relations de composition entre arguments :

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{div}(f \vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{rot}(f \vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + (\operatorname{grad} f) \wedge \vec{F}$$

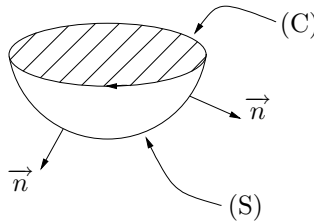
$$\operatorname{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

## V Les théorèmes d'analyse

### 1 Le théorème de Stokes

Ce théorème permet de ramener le calcul d'une circulation le long d'un contour fermé à une intégration sur une surface, ce qui peut être plus simple (par exemple en choisissant pour surface une demi-sphère).

On considère un contour fermé (C) sur lequel on choisit un sens de parcours arbitraire. On note (S) une surface s'appuyant sur (C). En un point de (S), on oriente le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  selon la règle du tire-bouchon :

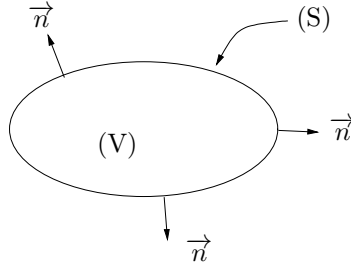


En notant  $\oint_{(C)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$  la circulation de  $\vec{f}$  sur le contour (C), le théorème de Stokes donne :

$$\oint_{(C)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

## 2 Le théorème de Green-Ostrogradski

Ce théorème permet de ramener un calcul sur une surface à un calcul sur un volume. On considère une surface fermée (S) limitant un volume (V). Par convention, le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à (S) est choisi *sortant*.



En notant  $\oiint_{(S)} \vec{F} \cdot \vec{dS}$  le flux de  $\vec{F}$  sortant de la surface fermée (S), le théorème de Green-Ostrogradski donne :

$$\oiint_{(S)} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

## 3 Les corollaires

Les notations sont les mêmes que précédemment.

$$\text{Formule de Kelvin} \quad \oint_{(C)} f \, \vec{d\ell} = - \iint_{(S)} \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \wedge \vec{dS}$$

$$\text{Formule du gradient} \quad \oiint_{(S)} f \, \vec{dS} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \, dV$$

$$\text{Formule du rotationnel} \quad \oiint_{(S)} \vec{dS} \wedge \vec{F} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\operatorname{rot} F} \, dV$$

<b>n° X</b> masse																	
1																	18
2																	2
3	1															17	10
4	2															9	10
5	3															8	10
6	4															7	10
7	5															6	10
8	6															5	10
9	7															4	10
10	8															3	10
11	9															2	10
12	10															1	10
13	11															0	10
14	12															-1	10
15	13															-2	10
16	14															-3	10
17	15															-4	10
18	16															-5	10
19	17															-6	10
20	18															-7	10
21	19															-8	10
22	20															-9	10
23	21															-10	10
24	22															-11	10
25	23															-12	10
26	24															-13	10
27	25															-14	10
28	26															-15	10
29	27															-16	10
30	28															-17	10
31	29															-18	10
32	30															-19	10
33	31															-20	10
34	32															-21	10
35	33															-22	10
36	34															-23	10
37	35															-24	10
38	36															-25	10
39	37															-26	10
40	38															-27	10
41	39															-28	10
42	40															-29	10
43	41															-30	10
44	42															-31	10
45	43															-32	10
46	44															-33	10
47	45															-34	10
48	46															-35	10
49	47															-36	10
50	48															-37	10
51	49															-38	10
52	50															-39	10
53	51															-40	10
54	52															-41	10
55	53															-42	10
56	54															-43	10
57	55															-44	10
58	56															-45	10
59	57															-46	10
60	58															-47	10
61	59															-48	10
62	60															-49	10
63	61															-50	10
64	62															-51	10
65	63															-52	10
66	64															-53	10
67	65															-54	10
68	66															-55	10
69	67															-56	10
70	68															-57	10
71	69															-58	10
72	70															-59	10
73	71															-60	10
74	72															-61	10
75	73															-62	10
76	74															-63	10
77	75															-64	10
78	76															-65	10
79	77															-66	10
80	78															-67	10
81	79															-68	10
82	80															-69	10
83	81															-70	10
84	82															-71	10
85	83															-72	10
86	84															-73	10
87	85															-74	10
88	86															-75	10
89	87															-76	10
90	88															-77	10
91	89															-78	10
92	90															-79	10
93	91															-80	10
94	92															-81	10
95	93															-82	10
96	94															-83	10
97	95															-84	10
98	96															-85	10
99	97															-86	10
100	98															-87	10
101	99															-88	10
102	100															-89	10
103	101															-90	10
104	102															-91	10
105	103															-92	10
106	104															-93	10
107	105															-94	10
108	106															-95	10
109	107															-96	10
110	108															-97	10
111	109															-98	10
112	110															-99	10
113	111															-100	10
114	112															-101	10
115	113															-102	10
116	114															-103	10
117	115															-104	10
118	116															-105	10
119	117															-106	10
120	118															-107	10
121	119															-108	10
122	120															-109	10
123	121															-110	10
124	122															-111	10
125	123															-112	10
126	124															-113	10
127	125															-114	10
128	126															-115	10
129	127															-116	10
130	128															-117	10
131	129															-118	10
132	130															-119	10
133	131															-120	10
134	132															-121	10
135	133															-122	10
136	134															-123	10
137	135															-124	10
138	136															-125	10
139	137															-126	10
140	138															-127	10
141	139															-128	10
142	140															-129	10
143	141															-130	10
144	142															-131	10
145	143															-132	10
146	144															-133	10
147	145															-134	10
148	146															-135	10
149	147															-136	10
150	148															-137	10
151	149															-138	10
152	150															-139	10
153	151															-140	10
154	152															-141	10
155	153															-142	10
156	154															-143	10
157	155															-144	10
158	156															-145	10
159	157															-146	10
160	158															-147	10
161	159															-148	10
162	160															-149	10
163	161															-150	10
164	162															-151	10
165	163															-152	10
166	164															-153	10
167	165															-154	10
168	166															-155	10
169	167															-156	10
170	168															-157	10
171	169															-158	10
172	170															-159	10
173	171															-160	10
174	172															-161	10
175	173															-162	10
176	174															-163	10
177	175															-164	10
178	176															-165	10
179	177															-166	10
180	178															-167	10
181	179															-168	10
182	180															-169	10
183	181															-170	10
184	182															-171	10
185	183															-172	10
186	184															-173	10
187	185															-174	10
188	186															-175	10
189	187															-176	10
190	188															-177	10
191	189															-178	10
192	190															-179	10
193	191															-180	10
194	192															-181	10
195	193															-182	10
196	194															-183	10
197	195															-184	10
198	196															-185	10
199	197															-186	10
200	198															-187	10
201	199															-188	10
202	200															-189	10
203	201															-190	10
204	202															-191	10
205	203															-192	10
206	204															-193	10
207	205															-194	10
208	206															-195	10
209	207															-196	10
210	208															-197	10
211	209															-198	10
212	210															-199	10
213	211															-200	10
214	212															-201	10
215	213															-202	10
216	214															-203	10
217	215															-204	10
218	216															-205	10
219	217															-206	10
220	218															-207	10
221	219															-208	10
222	220															-209	10
223	221															-210	10
224	222															-211	10
225	223															-212	10
226	224															-213	10
227	225															-214	10
228	226															-215	10
229	227															-216	10
230	228															-217	10
231	229															-218	10
232	230															-219	10
233	231															-220	10
234	232															-221	10
235	233															-222	10
236	234															-223	10
237	235															-224	10
238	236															-225	10
239	237															-226	10
240	238															-227	10
241	239															-228	10
242	240															-229	10
243	241															-230	10
244	242															-231	10
245	243															-232	10
246	244															-233	10
247	245															-234	10
248	246															-235	10
249	247															-236	10
250	248															-237	10
251	249															-238	10
252	250															-239	10
253	251															-240	10
254	252															-241	10
255	253															-242	10
256	254															-243	10
257	255															-244	10
258	256															-245	10
259	257															-246	10
260	258															-247	10
261	259															-248	10
262	260															-249	10
263	261															-250	10
264	262															-251	10
265	263															-252	10
266	264															-253	10
267	265															-254	10
268	266															-255	10
269	267															-256	10
270	268															-257	10