– Dans le cas où a et b sont nuls,

$$g(x_0) = \frac{-d}{c} f(g(x_0))$$

soit
$$\left(k^2 + \frac{c^2}{d^2}\right) g(x_0) = 0$$

et $g(x_0)$ est nécessairement nul.

On peut donc conclure que si G est liée, alors $g(x_0) = 0$.

Par conséquent, $\boxed{\text{G est liée si et seulement si } g(x_0) = 0.}$

I.E.3 En se plaçant dans le cas où $g(x_0)$ est non nul, on en déduit que G est libre ; c'est donc une base de l'espace F. L'ensemble F est par ailleurs stable par f. On en déduit donc d'après la question I.A que toute f-trajectoire initialisée dans F est incluse dans F. C'est précisément le cas de la trajectoire x initialisée en x_0 qui appartient à F. On peut donc décomposer la trajectoire x dans la base G, d'où l'existence des fonctions u, v, w et h telles que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0)}$$

De plus, par un raisonnement similaire à celui de la question I.D.2, u, v, w et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour déterminer précisément u, v, w et h, on revient à la propriété qui définit les f-trajectoires :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = f(x(t))$$

En développant dans la base G, on obtient

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) &= f\left[u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0)\right] \\ &= u(t)f(x_0) + v(t)f^2(x_0) + w(t)fg(x_0) + h(t)fgf(x_0) \end{aligned}$$

En remarquant que f et g commutent et que $g = f^2 + k^2\mathrm{I}_\mathrm{E}$, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = u(t)f(x_0) + v(t)\left[g(x_0) - k^2x_0\right] + w(t)gf(x_0) - k^2h(t)g(x_0)$$

Par ailleurs, $$x' = u'x_0 + v'f(x_0) + w'g(x_0) + h'fg(x_0)$$

Comme G est une base de F, on obtient alors le système différentiel

$$\begin{cases} u' = -k^2v \\ v' = u \\ w' = v - k^2h \\ h' = w \end{cases}$$

On peut résoudre facilement les équations en u et v puisque $u''+k^2u = 0$ et $v''+k^2v = 0$. u et v sont donc de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad u(t) = a\cos kt + b\sin kt \qquad \text{et} \qquad v(t) = c\cos kt + d\sin kt$$

On sait de plus que les conditions en $t = 0$ impliquent

$$u(0) = v'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad v(0) = u'(0) = 0$$

Par conséquent, $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad u(t) = \cos kt \quad v(t) = \frac{\sin kt}{k}}$$

On peut dès lors écrire les équations différentielles formées par w et h en utilisant l'expression de v.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h''(t) + k^2 h(t) = \frac{\sin kt}{k} \qquad \text{et} \qquad w''(t) + k^2 w(t) = \cos kt$$

Il existe donc a, b, c et d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left\{ \begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{k^2} \int_0^x \sin k(x-t) \sin kt \,\mathrm{d}t + a \cos kx + b \sin kx \\ w(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-t) \cos kt \,\mathrm{d}t + c \cos kx + d \sin kx \end{aligned} \right.$$

Les conditions initiales sont $\quad \left\{ \begin{aligned} h(0) &= h'(0) = 0 \\ w(0) &= w'(0) = 0 \end{aligned} \right.$

Ainsi, les constantes a, b, c et d sont nulles. On peut alors en déduire l'expression de w et h.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{1}{k^2} \int_0^x \frac{\cos(kx) + \cos(kx - 2kt)}{2} \,\mathrm{d}t$$

Le calcul de l'intégrale précédente est alors aisé et on trouve

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{x \cos(kx)}{2k^2}}$$

La formule pour w s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad w(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-t) \cos kt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k} \int_0^x \frac{\sin kx + \sin k(x - 2t)}{2} \,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, $\quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad w(x) = \frac{x}{2k} \sin kx}$

En particulier, $\quad \displaystyle \lim_{n \to +\infty, n \in \mathbb{Z}} \left| h\left(n \frac{\pi}{k}\right) \right| = +\infty$

$$\boxed{\text{La trajectoire n'est pas bornée.}}$$