I. Quelques propriétés de $\mathrm{F} = \theta(f)$

> Certaines questions de cette partie peuvent sembler très simples. Cependant, il faut bien faire attention à en rédiger les réponses correctement. Par exemple, avant de calculer la dérivée d'une fonction, on doit *systématiquement* préciser que f est bien dérivable.
>
> Il est également très mal vu, par exemple, de confondre la *fonction* f avec l'image d'un élément $f(t)$ par cette même fonction.

I.1.1 Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+1} 1 \, \mathrm{d}t = [t]_x^{x+1} = x + 1 - x = 1$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = 1}$$

I.1.2 Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+1} t^k \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^{x+1}$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}}$$

I.2.1 Notons φ une primitive de f. Comme f est continue, φ est $\mathscr{C}^1$. De plus, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

Par composition et addition de fonctions $\mathscr{C}^1$, F est $\mathscr{C}^1$. En outre, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x)$$

d'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x+1) - f(x)}$$

I.2.2 Supposons que f soit croissante sur un intervalle $[\,x_0\,;+\infty\,[$. Alors

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x+1) \geqslant f(x)$$

d'où
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x+1) - f(x) \geqslant 0$$

donc F est croissante sur $[\,x_0\,;+\infty\,[$. On en déduit

$$\boxed{f \text{ croissante sur } [\,x_0\,;+\infty\,[\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{F} \text{ croissante sur } [\,x_0\,;+\infty\,[}$$

On montre de même que

$$\boxed{f \text{ décroissante sur } [\,x_0\,;+\infty\,[\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{F} \text{ décroissante sur } [\,x_0\,;+\infty\,[}$$