$\boxed{\mathbf{5}}$ Écrivons la conservation de l'énergie entre le point initial ($\alpha(0) = \alpha_0$ et $\dot{\alpha}(0) = 0$) et un point quelconque, pour la seconde sphère

$$\mathrm{E_t} = \frac{1}{2}m(\mathrm{R}-r)^2\dot{\alpha}^2 - mg(\mathrm{R}-r)\cos\alpha = -mg(\mathrm{R}-r)\cos\alpha_0$$

dont on déduit
$$\dot{\alpha}^2 = 2\frac{g}{\mathrm{R}-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

De plus, en choisissant $\alpha_0 > 0$, il est clair que $\dot{\alpha} \leqslant 0$ pendant le temps τ que met la sphère à atteindre le point A et que $\cos\alpha - \cos\alpha_0 \geqslant 0$. Ainsi

$$\dot{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2g}{\mathrm{R}-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

Il ne reste ensuite qu'à séparer les variables et intégrer pour obtenir

$$\tau = \int_0^\tau \mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{\mathrm{R}-r}{2g}}\int_{\alpha_0}^0 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$$

soit au final
$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{\mathrm{R}-r}{2g}}\int_0^{\alpha_0} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}}$$

> Cette intégrale est elliptique, donc il est inutile de chercher une primitive !

Le temps τ' mis par la première sphère pour atteindre le point A se déduit du temps τ en remplaçant g par $g_{\mathrm{eff}} = 5g/7$, ce qui donne

$$\boxed{\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}}$$