I. Mouvement sans suspension

I.1.a Dans le référentiel non galiléen lié au sol, les forces appliquées à la masse M sont :

- son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -\mathrm{M}\,g\,\overrightarrow{u_z}$;
- la réaction du support $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\,\overrightarrow{u_z}$;
- les forces d'inertie $\overrightarrow{f}_{\mathrm{ie}}$ et $\overrightarrow{f}_{\mathrm{ic}}$.

La réaction du support est normale au support car on néglige tout mouvement dans le plan du sol. Puisque le sol est animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen, la force de Coriolis est nulle ; les forces d'inerties se résument alors à

$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{ie}} = -\mathrm{M}\,\overrightarrow{a_{\mathrm{e}}} = -\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{z_{\mathrm{s}}}}{\mathrm{d}t^2}$$

On notera z' la distance de la masse au sol. Ainsi, le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projetant sur l'axe $(\mathrm{O}z)$,

$$\boxed{\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{M}\,z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - \mathrm{M}g + \mathrm{R}}$$

I.1.b Les conditions sur R sont

- $\mathrm{R} = 0$ si $z' > 0$;
- $\mathrm{R} \geqslant 0$ si $z' = 0$.

On a nécessairement décollement si à un instant donné l'accélération de la masse est dirigée vers le haut. Compte tenu de la forme de $\overrightarrow{\mathrm{R}}$, ceci se produit si

$$-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g > 0$$

La valeur correspondante de l'accélération du sol vaut

$$\boxed{a_{\mathrm{M}} = -g}$$

> Il fallait s'y attendre : la masse ne peut pas suivre le sol si celui-ci « tombe » plus vite que le ferait la masse toute seule.

Dans le cas où $|a_{\mathrm{s}}(t)| < |a_{\mathrm{M}}|$ à chaque instant, la quantité $-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g$ ne peut jamais devenir positive ; la masse reste donc **collée au sol**.

I.2.a La masse reste en contact avec le sol tant que $-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g$ est négatif. Le décollage s'effectue donc pour t_0 tel que

$$z_0\,\omega^2\cos(\omega t_0) + g = 0$$

d'où

$$\cos(\omega t_0) = -\frac{g}{z_0\,\omega^2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{z_{\mathrm{D}} = z_0\,(1 - \cos(\omega t_0)) = z_0 + \frac{g}{\omega^2}}$$

On peut alors écrire $$\Phi(\mathrm{R},h) = \iint_{\text{disque}} \overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$$

$$\Phi(\mathrm{R},h) = \int_{\rho=0}^{\mathrm{R}} 2\pi\rho\,\overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{u_z}\,\mathrm{d}\rho$$

Puisque $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{u_z} = h$, on a $\overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{u_z} = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \dfrac{3h^2 - \left(\rho^2 + h^2\right)}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{5/2}}$

Ensuite, $$\Phi(\mathrm{R},h) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \int_{\rho=0}^{\mathrm{R}} \rho \left(\frac{3h^2}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} \right) \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \left[-\frac{h^2}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{1/2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=\mathrm{R}}$$

$$\boxed{\Phi(\mathrm{R},h) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \frac{\mathrm{R}^2}{\left(\mathrm{R}^2 + h^2\right)^{3/2}}}$$

IV.1.c On peut calculer la f.é.m induite sur le contour en utilisant la loi de Faraday

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Comme l'aimant se déplace à la vitesse v, on a

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h} = -v \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h}$$

> Ici, il faut faire attention au signe : si v est dirigé vers les valeurs positives de h, la distance de l'aimant à la spire se réduit. Il y a bien un signe « − ».

Par conséquent, $$\boxed{e = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} v}{2} \frac{h\,\mathrm{R}^2}{\left(h^2 + \mathrm{R}^2\right)^{5/2}}}$$

IV.1.d On peut calculer $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ en remarquant qu'en intégrant le long du contour,

$$\oint_{\text{cercle}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = e$$

donc $$\mathrm{E}_\varphi(\mathrm{R},h) = \frac{e}{2\pi\mathrm{R}} = -\frac{3\,\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \frac{h\,\mathrm{R}}{\left(h^2 + \mathrm{R}^2\right)^{5/2}} v$$

On obtient bien la forme donnée par l'énoncé, avec

$$\boxed{\kappa = -\frac{3\,\mu_0}{4\pi}}$$

IV.1.e Si maintenant l'aimant est fixe et le tube en translation, un porteur de charge dans le tube subit une force

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} = -q\,\frac{3\mu_0\,\mathcal{M}\,v\,h}{4\pi}\,\frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{r}}{r^5}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\,q\,\frac{3\mu_0\,\mathcal{M}\,v}{4\pi}\,\frac{h\,\mathrm{R}}{r^5}\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

On voit que l'on retrouve la même expression que celle de la force due au champ électrique calculé à la question précédente. Cela est rassurant dans le sens où les deux approches sont légitimes ; il est donc normal que les phénomènes physiques obtenus, à savoir les courants dans le tube, soient les mêmes.

> Ceci est une preuve de la dépendance forte des champs par rapport au référentiel choisi. Dans beaucoup de problèmes d'induction, il est possible de considérer deux approches différentes, l'une issue de l'équation de Maxwell-Faraday, comme ce qui aboutit au calcul de e à la question IV.1.c, l'autre fondée sur des changements de référentiels, comme dans cette question. Généralement, la seconde méthode est la plus rapide, mais elle ne peut pas toujours être employée.

IV.2.a D'après la loi d'Ohm, le courant dans le tube vaut $\overrightarrow{\jmath} = \sigma\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$. La puissance volumique vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{vol}} = \overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{E}} = \sigma\,\overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{E}} = \sigma {\mathrm{E}_\varphi}^2}$$

IV.2.b Pour obtenir la puissance totale dissipée, il suffit d'intégrer la puissance volumique sur le volume total :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{tot}} &= \int_{\mathrm{R}=\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} 2\pi\mathrm{R}\int_{h=-\infty}^{\infty} \sigma{\mathrm{E}_\varphi}^2\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\mathrm{R}\\ &= \sigma\kappa^2 v^2\mathcal{M}^2 2\pi\int_{\mathrm{R}=\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2}\mathrm{R}^3\int_{h=-\infty}^{\infty}\frac{h^2}{(\mathrm{R}^2+h^2)^5}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\mathrm{R}\end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{tot}} &= \sigma\kappa^2 v^2\mathcal{M}^2 2\pi\,\frac{5\pi}{128}\int_{\mathrm{R}=\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2}\frac{1}{\mathrm{R}^4}\,\mathrm{d}\mathrm{R}\\ &= \sigma\kappa^2 v^2\mathcal{M}^2 2\pi\,\frac{5\pi}{3\times 128}\left(\frac{1}{{\mathrm{R}_1}^3}-\frac{1}{{\mathrm{R}_2}^3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{tot}} = \sigma{\mu_0}^2 v^2\mathcal{M}^2\,\frac{15\,\pi^2}{1024}\left(\frac{1}{{\mathrm{R}_1}^3}-\frac{1}{{\mathrm{R}_2}^3}\right)}$$

IV.2.c Le système constitué par le tube et l'aimant est isolé ; en conséquence, la puissance totale dissipée dans le système doit être nulle. Ceci s'écrit

$$\mathcal{P}_{\mathrm{tot}} + \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{tube}\,\to\,\mathrm{aimant}}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

Ceci donne, puisque $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{tube}\,\to\,\mathrm{aimant}}$ est par symétrie nécessairement portée par $\overrightarrow{u_z}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{tube}\,\to\,\mathrm{aimant}} = -\frac{\mathcal{P}_{\mathrm{tot}}}{v}\,\overrightarrow{u_z}$$

c'est-à-dire $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{tube}\,\to\,\mathrm{aimant}} = -\sigma{\mu_0}^2\mathcal{M}^2\,\frac{15\,\pi^2}{1024}\left(\frac{1}{{\mathrm{R}_1}^3}-\frac{1}{{\mathrm{R}_2}^3}\right)v\,\overrightarrow{u_z}}$$