et de même $$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r_0}\left(1+\frac{\ell}{r_0}\,\cos\theta\,+\,\frac{1}{2}\,\left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2\left[3\cos^2\theta-1\right]\right)$$

Tous calculs faits, on parvient alors à

$$\boxed{\mathrm{E_p} = -\,\mathrm{G\,M_T}\,m\,\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) = -\frac{\mathrm{G\,M_T}\,m}{r_0}\,\left(2+\left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2\left[3\cos^2\theta-1\right]\right)}$$

16 L'énoncé demande de retrouver l'équation différentielle de la question 14 en utilisant le référentiel géocentrique supposé galiléen. L'énergie cinétique dans ce référentiel, avec les hypothèses du modèle données en début de partie (orbite circulaire de rayon r_0 du centre d'inertie et Ω constant), vaut alors

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\,m\,\left(v^2(\mathrm{M_1})+v^2(\mathrm{M_2})\right)$$

Or, on a successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}(\mathrm{M_1}) &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{SM_1}}}{\mathrm{d}t}\\
&= r_0\Omega\,\overrightarrow{u_{y'}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left[(\cos\theta\,\overrightarrow{u_{x'}}+\sin\theta\,\overrightarrow{u_{y'}})\,\ell\right]\\
&= r_0\Omega\,\overrightarrow{u_{y'}}-\ell\,\dot\theta\sin\theta\,\overrightarrow{u_{x'}}+\dot\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u_{y'}}+\ell\Omega\cos\theta\,\overrightarrow{u_{y'}}-\ell\Omega\sin\theta\,\overrightarrow{u_{x'}}\\
\overrightarrow{v}(\mathrm{M_1}) &= -\ell\,(\dot\theta+\Omega)\sin\theta\,\overrightarrow{u_{x'}}+(r_0\Omega+\ell\,(\dot\theta+\Omega)\,\cos\theta)\,\overrightarrow{u_{y'}}
\end{aligned}$$

soit $$v^2(\mathrm{M_1}) = \ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2+{r_0}^2\Omega^2+2r_0\Omega\ell\,(\dot\theta+\Omega)\,\cos\theta$$

de même $$v^2(\mathrm{M_2}) = \ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2+{r_0}^2\Omega^2-2r_0\Omega\ell\,(\dot\theta+\Omega)\,\cos\theta$$

et finalement $$\mathrm{E}_c = m\left(\ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2+{r_0}^2\Omega^2\right)$$

L'énergie mécanique vaut alors la somme de cette énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation

$$\mathrm{E_m} = m\left(\ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2+{r_0}^2\Omega^2\right)-\frac{\mathrm{G\,M_T}\,m}{r_0}\,\left[2+\left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2(3\cos^2\theta-1)\right]$$

En l'absence de frottements, cette énergie est constante. Or, pour une orbite circulaire

$$-\frac{\mathrm{G\,M_T}\,m}{{r_0}^2} = -mr_0\Omega^2$$

d'où $$\mathrm{E_m} = m\left(\ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2+{r_0}^2\Omega^2\right)-\,m{r_0}^2\Omega^2\left[2+\left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2(3\cos^2\theta-1)\right]$$

et finalement $\mathrm{E_m} = m\,\ell^2\,(\dot\theta+\Omega)^2-\,m{r_0}^2\Omega^2\,-\,m\ell^2\Omega^2\left[3\cos^2\theta-1\right]$

En dérivant et en simplifiant par $2m\ell^2$, on obtient ainsi

$$\boxed{\ddot\theta\,(\Omega+\dot\theta)+3\Omega^2\dot\theta\cos\theta\sin\theta = 0}$$

qui ne permet pas de revenir à l'équation proposée par la méthode directe. **Ainsi posé, le problème ne permettait donc pas de retrouver l'équation différentielle**.

La seule solution, avec les hypothèses proposées, était de passer par le référentiel tournant, ce qui ne correspondait toutefois pas à la méthode imposée par le sujet. Évaluons l'énergie cinétique dans le référentiel tournant $(\mathrm{S}, \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'})$. Celle-ci vaut

$$\mathrm{E_c} = 2 \times \frac{1}{2}\, m\, (\ell\, \dot{\theta})^2$$

Dans ce référentiel non-galiléen, il faut considérer les forces d'inertie. La force de Coriolis ne travaille pas. Le travail élémentaire de la force d'entrainement vaut

$$\delta \mathrm{W_e} = m\Omega^2\, (\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{SM_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OM_2}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{SM_2}}) = m\Omega^2\, \overrightarrow{\mathrm{M_2M_1}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{SM_1}} = 0$$

Le travail total est donc nul également, et finalement aucune force d'inertie ne travaille. L'énergie mécanique se restreint ainsi à l'énergie potentielle de gravitation

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_p} + \mathrm{E_c} = -\frac{\mathrm{G\,M_T}\, m}{r_0} \left[2 + \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) \right] + m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2$$

En l'absence de frottements, cette énergie est une constante. En dérivant par rapport à θ, on obtient donc

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\,\mathrm{G\,M_T}}{{r_0}^3}\, \sin\theta\, \cos\theta = 0}$$

On retrouve cette fois-ci la même équation qu'à la question 14 et donc la même période d'oscillation. Cette partie a par conséquent permis d'envisager deux méthodes différentes (étude dynamique dans un référentiel non galiléen et énergétique dans un référentiel galiléen) pour résoudre un même problème.