I.2.a La force totale $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ et l'énergie potentielle $\mathrm{E_p}$ sont liées par

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{E_p(M)} \qquad \text{soit} \qquad -k(z-\ell_0)+mg = -\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}z}$$

On en déduit par intégration à une constante près

$$\mathrm{E_p(M)} = \frac{k}{2}(z-\ell_0)^2 - mg\,z + \mathrm{C^{te}}$$

et comme on impose $\mathrm{E_p} = 0$ à l'équilibre en $z_\mathrm{e} = \ell_0 + mg/k$,

$$\boxed{\mathrm{E_p(M)} = \frac{k}{2}(z-\ell_0)^2 - mg\,(z-\ell_0) + \frac{m^2g^2}{2k}}$$

> On peut bien-sûr utiliser directement les expressions des énergies potentielles de rappel et de pesanteur à condition de ne pas oublier la constante et l'orientation descendante de l'axe vertical.

I.2.b Puisque $z-\ell_0 = z - z_\mathrm{e} + mg/k$, on peut écrire

$$\mathrm{E_p(M)} = \frac{k}{2}\left(\mathrm{Z}+\frac{mg}{k}\right)^2 - mg\left(\mathrm{Z}+\frac{mg}{k}\right) + \frac{m^2g^2}{2k}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{E_p(M)} = \frac{k}{2}\,\mathrm{Z}^2}$$

I.2.c Selon l'expression de $z(t)$ obtenue à la question I.1.c,

$$\mathrm{Z}(t) = a\cos(\omega_0 t) \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(t) = \dot{\mathrm{Z}}(t) = -a\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\mathrm{E_c}$ est

$$\langle \mathrm{E_c}\rangle = \frac{m}{2}\langle \dot{\mathrm{Z}}^2\rangle = \frac{m}{2}\times\frac{a^2{\omega_0}^2}{2}$$

soit

$$\boxed{\langle \mathrm{E_c}\rangle = \frac{ka^2}{4}}$$

et la valeur moyenne de l'énergie potentielle $\mathrm{E_p}$

$$\langle \mathrm{E_p}\rangle = \frac{k}{2}\left\langle \mathrm{Z}^2\right\rangle = \frac{k}{2}\frac{a^2}{2}$$

soit

$$\boxed{\langle \mathrm{E_p}\rangle = \frac{ka^2}{4}}$$

L'oscillateur harmonique dans un champ de pesanteur vérifie donc

$$\boxed{\langle \mathrm{E_c}\rangle = \langle \mathrm{E_p}\rangle}$$

I.2.d *Application numérique :*

$$\boxed{\omega_0 = 14\ \mathrm{rad.s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \langle \mathrm{E_p}\rangle = 1{,}3.10^{-2}\ \mathrm{J}}$$