

D'après la question III.E.2, les coefficients de Fourier de  $\gamma_{x_1}$  sont  $c_k = |a_k|^2$ . En prenant l'égalité précédente en  $t = 1/2$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{4\pi^2(a+k)^2} |1 - e^{-2i\pi a}|^2 = \cos(\pi a)$$

Or  $|1 - e^{-2i\pi a}|^2 = |e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}|^2 = 4 |\sin \pi a|^2$

ce qui donne, en réarrangeant les termes,

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2(a+k)^2} = \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}}$$

Les fonctions de  $\mathcal{Q}$  sont souvent appelées fonctions *presque périodiques*. Elles ont été introduites par Bohr dans les années trente. Celui-ci a en particulier montré l'équivalence de la définition donnée dans l'énoncé avec la définition suivante : une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  est dite presque périodique si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une quantité positive  $\ell(\varepsilon)$  telle que chaque intervalle sur l'axe réel de longueur  $\ell(\varepsilon)$  contienne au moins un nombre  $\tau$  pour lequel l'inégalité

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

est vraie pour tout  $x$ . Cette définition justifie le terme « presque périodique » employé. Il est facile de vérifier que toute fonction périodique continue sur  $\mathbb{R}$  vérifie cette définition : prendre par exemple  $\ell(\varepsilon) = 2T$ , où  $T$  est la période de  $f$ .

Dans ce problème, on a en particulier montré que  $\mathcal{Q}$  est un espace vectoriel stable par produit, et l'on a prouvé l'analogie de la formule de Bessel-Parseval pour les séries de Fourier. On a également introduit un opérateur interne  $x \mapsto \gamma_x$  sur  $\mathcal{Q}$  et l'on a exprimé les coefficients de Fourier-Bohr de  $\gamma_x$  en fonction de ceux de  $x$ .