Or, $\quad \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}} + \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha - k_0\,y\,\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} + \underline{\mathrm{E}'_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha + k_0\,y\,\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$

Par conséquent, la condition aux limites en $y = 0$ donne

$$(\mathrm{E}_0 + \underline{\mathrm{E}'_0})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)} = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de t et x, on obtient $\mathrm{E}_0 + \underline{\mathrm{E}'_0} = 0$, ou encore, $\underline{\mathrm{E}'_0} = -\mathrm{E}_0$. Finalement,

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = -\mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha + k_0\,y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Le champ total s'écrit alors

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}} + \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha - k_0 y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} - \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha + k_0 y\sin\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}} + \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = \mathrm{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_0\,y\,\sin\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_0\,y\sin\alpha}\right)\overrightarrow{e_z}$$

soit
$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}} + \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\sin\left(k_0\,y\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z} \qquad (\mathbf{1})$$

La condition aux limites en $y = b$, qui doit être vérifiée pour toute valeur de x et de t, impose donc $\sin\left(k_0\,b\,\sin\alpha\right) = 0$, ou encore $k_0\,b\,\sin\alpha = p\,\pi$, avec $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant $k_0 = 2\,\pi/\lambda_0$, on obtient

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{p\,\lambda_0}{2\,b} \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}^*} \qquad (\mathbf{2})$$

En effet, $p \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}^*$ ne convient pas puisque $\alpha \in \left]\,0\,;\pi/2\,\right[$ et donc $\sin\,\alpha > 0$.

I.A.2.b En reportant le résultat (**2**) dans l'équation (**1**), on trouve

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}} + \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(k_0\frac{p\,\lambda_0}{2\,b}\,y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\,\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

soit
$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(\frac{2\pi\,p\,\lambda_0\,y}{2\,b\,\lambda_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}$$

ce qui donne
$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\,\sin\left(\frac{p\,\pi\,y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\,x\cos\alpha)}\,\overrightarrow{e_z}}$$

La propagation se fait donc suivant la direction (Ox). De plus, α est choisi dans l'intervalle $\left]\,0\,;\pi/2\,\right[$, ce qui impose $k_0\cos\alpha > 0$. **La propagation de l'onde se fait ainsi suivant $\overrightarrow{e_x}$.**

Le champ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}}$ donné par l'énoncé ainsi que le champ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}}$ que l'on a trouvé à la question I.A.2.a correspondent à des ondes planes, progressives et monochromatiques qui sont des solutions des équations de Maxwell. Ces dernières étant linéaires, toute combinaison linéaire des vecteurs $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_1}}$ et $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}_2}}$, et en particulier $\underline{\overrightarrow{\mathbf{E}}}$, **est solution des équations de Maxwell**.

L'équation du champ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}$ donne quant à elle directement l'expression du vecteur d'onde dans le guide :

$$\boxed{k_{\mathrm{g}} = k_0\cos\alpha}$$