Annexe E

Indications pour les exercices

Exercice 1.8 – L'exercice est mal posé : en fait, il faut montrer directement la formule de la question 2, par récurrence ; cette formule assure la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.

Exercice 4.8 – On fait le changement de variable

$$z = \mathrm{i}\,t_1 \qquad t_1 \in [\,-1\,;\,6\,]$$

et donc $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{d}t_1$, d'où

$$\int_{\mathcal{T}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_{-1}^{6} (-3\mathrm{i}\,t)\,\mathrm{d}t = 3\,\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{6} = \frac{105}{2}.$$

De même, on cherche un chemin affine pour $\mathcal{T}_2$, par exemple

$$z = -\mathrm{i} + (2+7\mathrm{i})t \qquad t \in [\,0\,;\,1\,]$$

ce qui donne

$$\int_{\mathcal{T}_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{331}{6} - \frac{17}{3}\,\mathrm{i}.$$

Le chemin $\mathcal{T}_3$ est manifestement faux, il s'agit de $[\,2+6\mathrm{i}\,;\,6\mathrm{i}\,]$! On trouve alors

$$\int_{\mathcal{T}_3} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{8}{3} - 36\,\mathrm{i}.$$

Si l'on fait la somme de ces trois valeurs (on intègre f sur chemin fermé $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$...), on trouve une valeur non nulle ! C'est dû au fait que f n'est pas holomorphe[1], et donc le théorème de Cauchy ne s'applique pas.

1. Les relations de Cauchy ne sont pas vérifiées.

Exercice 5.6 – Pour le membre de gauche, utiliser le changement de variable $z = e^{i\theta}$, le résultat tombe tout seul.

Pour le membre de droite, il faut noter que, d'après les formules de Cauchy (théorème 4.40), on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) \qquad \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = f'(0).$$

Exercice 5.11 – Pour les pôles de F, résoudre $\operatorname{ch} z = 0$ revient à $e^z + e^{-z} = 0$, donc $e^{-z}(1 + e^{2z}) = 0$; puisque l'exponentielle ne s'annule pas, cela équivaut à $e^{2z} = -1 = e^{i\pi}$, ou encore $z = (2k+1)\pi$ pour k parcourant $\mathbb{Z}$.

Ensuite, on intègre F sur le rectangle proposé : sur chaque côté du rectangle, cela revient à faire un des changements de variable

$z = x \in [\,-R\,;\,R\,]$	$z = R + it,\ t \in [\,0\,;\,\pi\,]$
$z = x + i\pi, x \in [\,-R\,;\,R\,]$	*(attention à l'orientation !)*
$z = -R + it,\ t \in [\,0\,;\,\pi\,]$	*(attention à l'orientation !)*

Exercice 5.12 – L'intégrale sur le premier segment donne

$$\int_\varepsilon^r \frac{R(x+\eta)}{(x+i\eta)^\alpha}\,dx$$

où η est la hauteur du petit tunnel. Quand on fera $\eta \to 0$, les théorèmes de continuité d'une intégrale à paramètre (domination et utilisation de l'intégrabilité de $x \mapsto R(x)/x^\alpha$) assureront que cette intégrale tend vers

$$\int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx.$$

De même, l'intégrale sur le segment opposé – et orienté de la droite vers la gauche – vaut, quand $\eta \to 0$:

$$-e^{-2i\pi a}\int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx.$$

En effet, on a changé z en $e^{2i\pi-\varepsilon'}z$, donc z^α est changé en $e^{2i\pi\alpha}z^\alpha$! Le membre de droite vient directement de la formule des résidus (les pôles sont tous pris dans le contour, sauf le pôle éventuel en 0).