

Annexe E

Indications pour les exercices

Exercice 1.8 – L'exercice est mal posé : en fait, il faut montrer directement la formule de la question 2, par récurrence; cette formule assure la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ .

Exercice 4.8 – On fait le changement de variable

$$z = it_1 \quad t_1 \in [-1; 6]$$

et donc $dz = i dt_1$, d'où

$$\int_{\mathcal{T}_1} f(z) dz = i \int_{-1}^6 (-3it) dt = 3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^6 = \frac{105}{2}.$$

De même, on cherche un chemin affine pour \mathcal{T}_2 , par exemple

$$z = -i + (2 + 7i)t \quad t \in [0; 1]$$

ce qui donne

$$\int_{\mathcal{T}_2} f(z) dz = \frac{331}{6} - \frac{17}{3}i.$$

Le chemin \mathcal{T}_3 est manifestement faux, il s'agit de $[2 + 6i; 6i]$! On trouve alors

$$\int_{\mathcal{T}_3} f(z) dz = -\frac{8}{3} - 36i.$$

Si l'on fait la somme de ces trois valeurs (on intègre f sur chemin fermé $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3 \dots$), on trouve une valeur non nulle! C'est dû au fait que f n'est pas holomorphe¹, et donc le théorème de Cauchy ne s'applique pas.

1. Les relations de Cauchy ne sont pas vérifiées.

Exercice 5.6 – Pour le membre de gauche, utiliser le changement de variable $z = e^{i\theta}$, le résultat tombe tout seul.

Pour le membre de droite, il faut noter que, d'après les formules de Cauchy (théorème 4.40), on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) \quad \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz = f'(0).$$

Exercice 5.11 – Pour les pôles de F , résoudre $\operatorname{ch} z = 0$ revient à $e^z + e^{-z} = 0$, donc $e^{-z}(1 + e^{2z}) = 0$; puisque l'exponentielle ne s'annule pas, cela équivaut à $e^{2z} = -1 = e^{i\pi}$, ou encore $z = (2k + 1)\pi$ pour k parcourant \mathbb{Z} .

Ensuite, on intègre F sur le rectangle proposé : sur chaque côté du rectangle, cela revient à faire un des changements de variable

$$\begin{array}{ll} z = x \in [-R; R] & z = R + it, t \in [0; \pi] \\ z = x + i\pi, x \in [-R; R] & \text{(attention à l'orientation !)} \\ z = -R + it, t \in [0; \pi] & \text{(attention à l'orientation !)} \end{array}$$

Exercice 5.12 – L'intégrale sur le premier segment donne

$$\int_{\varepsilon}^r \frac{R(x + \eta)}{(x + i\eta)^{\alpha}} dx$$

où η est la hauteur du petit tunnel. Quand on fera $\eta \rightarrow 0$, les théorèmes de continuité d'une intégrale à paramètre (domination et utilisation de l'intégrabilité de $x \mapsto R(x)/x^{\alpha}$) assureront que cette intégrale tend vers

$$\int_{\varepsilon}^r \frac{R(x)}{x^{\alpha}} dx.$$

De même, l'intégrale sur le segment opposé – et orienté de la droite vers la gauche – vaut, quand $\eta \rightarrow 0$:

$$-e^{-2i\pi\alpha} \int_{\varepsilon}^r \frac{R(x)}{x^{\alpha}} dx.$$

En effet, on a changé z en $e^{2i\pi-\varepsilon'}z$, donc z^{α} est changé en $e^{2i\pi\alpha}z^{\alpha}$! Le membre de droite vient directement de la formule des résidus (les pôles sont tous pris dans le contour, sauf le pôle éventuel en 0).