Page 275 — *ligne 5 :* Lire

$$\text{« } A(\rho) = 2\pi \int_0^{D/2} r\, J_0(2\pi\rho r)\,dr = \frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{\pi D\rho} y\, J_0(y)\,dy = \ldots \text{ »}$$

Page 287 — *ligne −5 :* Lire « pour $x = \alpha$, elle n'est pas *toujours* intégrable... »

Page 289 — *figure 12.1 :* Les hachures ont disparu à l'impression ! Remplacer « hachuré » par « grisé » dans la légende, et remplacer les figures par celles de la page 9.

Page 293 — Théorème 12.19 : supprimer « avec la même abscisse de sommabilité » (deux fois).

Page 298 — *ligne 13 :* : il manque un facteur « t » dans $e^{i\omega_n t}$. De plus, la formule finale est

$$\widetilde{f}(\nu) = \text{pf } F(2i\pi\nu) + \sum_{n\in I} \frac{\lambda_n}{2(-2i\pi)^{m_n-1}\,(m_n-1)!}\,\delta^{(m_n-1)}(\nu-\nu_n).$$

Page 308 — Remarque 13.6 : lire « en tout point, *orthogonal* à $\boldsymbol{k}$ ».

Page 313 — *lignes 5 et 6 :* Le facteur de normalisation est « $1/\|f\|_2^2$ » et non « $1/\|f\|_2$ ».

Page 320 — *ligne 10 :* Lire « $\left\langle \left|S_P^2(t)\right| \right\rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|S_P(t)\right|^2 dt$ ».

Page 326 — *ligne 11 :* Lire « $\Phi(G) = D * G = G * D = \delta$ ».

Page 329 — *lignes 8–9 :* Le premier chemin correspond à la fonction de Green *avancée* et le second à la *retardée*.

lignes 12,17 : Lire *inférieur* dans le premier cas, et *supérieur* dans le deuxième.

Page 338 — *lignes −11 et −9 :* Lire « $\widetilde{G}(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{c}\,e^{-4\pi^2\chi \boldsymbol{k}^2 t/c}$ » et « $G(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{c}\,e^{-cr^2/4\chi t}/8(\pi\chi t)^{3/2}$ ».

Page 341 — *ligne −6 :* La signature choisie est $\mathsf{p}^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2$. Lire « $(-\mathsf{p}^2 + m^2)\,\mathscr{G}(\mathsf{p}) = 1$ » (c'est-à-dire remplacer les $\boldsymbol{p}$ par des p).

Page 341 — Il y a des erreurs de signe et une figure est mal passée à l'impression. Le plus simple est de remplacer par le texte suivant :

Errata

à la première édition

Cet errata est maintenu aussi complet que possible. Il inclut donc aussi bien des modifications importantes (référencées en gras) que des remarques triviales.

Je remercie tous ceux qui m'ont déjà fait part de leurs remarques et corrections, et en particulier Jean-Julien FLECK*, Céline* CHEVALIER*, Loïc* MELSCOET *et les professeurs François* THIRIOUX*, Jean* COUSTEIX*, Andreas* DE VRIES *et Emmanuel* KOWALSKI.

Page 3 — *ligne 17 :* Lire « $\|P\| = \max_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i|$ ».

Page 4 — *ligne −5 et −4 :* Lire « $|f(x) - \ell| \geqslant M$ » et non « $|f(x) - \ell| \geqslant M$ ».

Page 9 — *ligne 16 :* Lire « u_n » et non « u_q ».

ligne −4 : Lire « $\sum_{n=0}^{k}$ » et non « $\sum_{k=0}^{k}$ ».

Page 15 — *ligne 15 :* Lire « $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ et $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n (z-z_0)^{n-k}$. »

Page 16 — *ligne −3 :* Lire « de classe $\mathscr{C}^n$ » et « de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux ».

Page 17 — *ligne 1 :* : le reste est comme ci-dessous :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}\big(a + \theta(x-a)\big).$$

ligne 8 : Lire « $\sup_{t\in[a,b]} \left\| f^{k+1}(t) \right\|$ ».

Page 20 — *lignes 19 et 20 :* Lire « $f = f_n + R_n$, avec $f_n(x) = \ldots.$ »

Page 23 — *ligne −8 :* Lire « avec $\ell \cdot m = \frac{1}{1000}$ J. km^{-2}h^2 » et non $m = \frac{1}{100}$ J. m^{-2}s^2 ».

Page 24 — *ligne 3 :* Il y a bien sûr une petite erreur de signe après la première égalité : lire « $(v^{*\prime})^2 - (v^*)^2$ » et non l'opposé.

Page 25 — *ligne 9 :* Lire « $\Delta E_c^* = \Delta E_c$ ».

Page 32 — *lignes 24 et 25 :* Lire « ... se fait toujours avec les *amplitudes* » (et non les intensités).

Page 46 — *ligne 10 :* La suite construite est *croissante* et de mesure tendant vers $\mu(E)$.

Page 51 — *lignes 10 à 14 :* Remplacer ces quatre lignes par les suivantes : « Alors, si $r, s \in \mathbb{Q}$ et $r \neq s$, les ensembles E_r et E_s sont forcément disjoints. En effet, supposons qu'il existe $x \in E_r \cap E_s$. Alors il existe $y, z \in E$ tels que $x = r + y = s + z$, donc $z - y = r - s$ est un rationnel, c'est-à-dire $z \sim y$. Mais E ne contient qu'un seul élément pour chaque classe d'équivalence, donc $y = z$ et donc $r = s$: contradiction. »

Page 56 — *lignes 4 et −6 :* Remplacer « $f(x,t)$ » par « $f(t,x)$ ».

Page 67 — *ligne 13 :* Lire « $1 - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ ».

ligne −13 : Lire « $f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n c_n (z-a)^{n-1}$ ».

**Page 75 — ***ligne 6 :* Lire « $f \in \mathscr{H}(\Omega) \Longleftrightarrow f$ est analytique sur Ω ».
ligne 7 : Lire « pour tout $a \in \Omega$ » au lieu de « pour tout $a \in \mathbb{C}$ ».

Page 77 — *ligne 12 :* Il manque un facteur : lire « $\dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\,\mathrm{d}\xi = f'(z)$ ».

Page 85 — *ligne 14 :* Il manque encore ce facteur : lire « $2\mathrm{i}\pi\, f(z) = \dots$ ».
ligne 16 : Lire « $|\xi/z| < 1$ » et non « $|\xi - z| < 1$ ».

Page 87 — *ligne 8 :* Lire « $(z-a)^n$ » et non « z^n ».

Page 90 — *ligne −7 :* Lire « $0 \leqslant \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin\theta$ ».
lignes 11 et 16 : Remplacer « $f(x)$ » par « $f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ ».

Page 93 — *ligne 9 :* Lire « $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z^2+a^2}\,;\,-\mathrm{i}a\right)$ ».

Page 94 — *lignes −8 et −9 :* Lire « $f(n) = \operatorname{Res}\,\big(\pi f(z)\operatorname{cotan}\pi z\,;\, z = n\big)$ ».

Page 95 — *ligne 10 :* Lire « $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}\,\pi\operatorname{cotan}\pi z$ ».

Page 101 — *lignes −7 et jusqu'à la fin de la page :* Remplacer par « Montrons que (iv) implique (iii) — cela établira également que (iv) implique (i) et (ii). Supposons donc la propriété (iv). Nous pouvons également supposer que f n'est pas la fonction nulle (ce qui est un cas trivial). Alors f ne s'annule en aucun point, et donc la somme $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 = \mathrm{C}^{\text{te}}$ n'est jamais nulle. On a

$$0 = \frac{\partial\,|f|^2}{\partial x} = 2\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + 2\mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \overset{\text{Cauchy}}{=} 2\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + 2\mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

et
$$0 = \frac{\partial\,|f|^2}{\partial y} = 2\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + 2\mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = -2\mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + 2\mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}.$$

Les deux équations précédentes s'écrivent donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{P} \\ -\mathrm{P} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\mathrm{Q}/\partial x \\ \partial \mathrm{Q}/\partial y \end{pmatrix} = 0.$$

Or le déterminant de la matrice est $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2$ qui ne s'annule jamais. On en déduit que, en tout point $\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0$ et, par conséquent, que $\mathrm{Q} = \mathrm{C}^{\text{te}}$. »

Page 109 — *ligne −9 :* Lire « $\sqrt{z} \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ » et non « $\sqrt{z} \overset{\text{déf.}}{=} \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ ».

Page 120 — *ligne 4 :* Lire « vérifiant les conditions ii) et iii). »
ligne 13 : Lire « $f_\alpha(z) = f_\alpha(z_\alpha) + \dots$ ».

Page 121 — Les deux dernières équations centrées sont

$$\mathrm{I}_\alpha \approx \mathrm{e}^{-f_\alpha(z_\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_\alpha \approx \mathrm{e}^{-f_\alpha(z_\alpha)}\left\{\frac{2\pi}{\mathrm{d}^2 f_\alpha/\mathrm{d}z^2\big|_{z=z_\alpha}}\right\}^{1/2}.$$

Page 123 — Les deux dernières équations centrées sont

$$\mathrm{I}_\alpha \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}f_\alpha(x_\alpha)}\left[\frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{d}^2 f_\alpha/\mathrm{d}x^2\big|_{x=x_\alpha}}\right]^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \Gamma(z) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x.$$

Page 127 — *ligne 16 :* Lire $f : z \mapsto z/(1+|z|)$.

Page 128 — *dernière figure :* Les points A et C cheminent vers 1, et non vers i et −i.

Page 135 — *dernière équation :* Le facteur de normalisation est $q/4\pi$ et non q/π.

Page 140 — *ligne −8 :* Lire « $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})$ » et non « $u(ex^{\mathrm{i}\psi})$ ».

Page 148 — *ligne −14 :* Le facteur de normalisation devrait être : $\mathrm{D}_n(\boldsymbol{r}) = 3n^3/4\pi$ et non n^3.

Page 149 — *ligne 7 :* Lire : « ... en notant ρ_{vol} la densité... »

Page 152 — *ligne −15 :* Lire « $\|\phi_n - \phi\|_\infty$ » et non « $\|\phi_n - \phi\|_0$ ».

Page 156 — *ligne −12 :* Lire « $\phi(x)/(x-a)$ » et non « $\phi(x)/x$ » sous les deux intégrales.

Page 158 — *ligne -8 :* Il *faut* supposer que f' est localement intégrable : cela ne saurait se déduire de l'énoncé ($x \mapsto \ln|x|$ est localement sommable mais pas sa dérivée, par exemple).

Page 169 — *lignes 12, 15 et 17 :* Lire « de hauteur 2 », « $f'' = \operatorname{sgn}' = 2\delta$ » et « $f^{(k)} = 2\delta^{(k-2)}$ ».

Page 192 — *ligne −6 :* La fréquence plasma est « $\omega_{\mathrm{p}}^2 = \lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2[1 - \varepsilon(\omega)]$ ».

Page 202 — *ligne 7 :* Lire « $\mathrm{H}(t)$ » et non « $\mathrm{H}(-t)$ » dans le dernier membre.

Page 203 — *ligne 14 :* Il manque un signe dans la définition de la pseudo-fonction :

$$\text{« }\operatorname{pf}\frac{1}{x^2} \overset{\text{déf.}}{=} -\left[\operatorname{vp}\frac{1}{x}\right]'.\text{ »}$$

Page 215 — *sur la figure :* Les signes ont disparu à l'impression. Lire « $x+y$ » en haut à droite et « $x-y$ » en bas à droite.

Page 218 — *ligne −9 :* Lire « pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ » et non « pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

Page 221 — *lignes 12 et 13 :* Lire « $|x\rangle$ » et « $|p\rangle$ » au lieu de « $\langle x|$ » et « $\langle p|$ ».

Page 222 — *ligne 11 :* Lire « $c_k\,e_k(x)$ » et non « $c_k\,e_k$ ».
ligne −1 : Lire « $\|f - f_n\|_2^2 = \dots$ ».

Page 223 — *ligne −4 :* Lire « $\int_0^a f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ » et non « $\int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ ».

Page 224 — *formule encadrée :* les sommes vont de $n=1$ à l'infini.
Remarque 9.35 : les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont indexées par $\mathbb{Z}$ et non $\mathbb{N}$.

Page 225 — *ligne −8 :* Remplacer la valeur absolue par des parenthèses.

Page 233 — *ligne 4 :* Lire « $\mathrm{S}_n(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\sin\Big[(2k+1)2\pi t\Big]$ ».

Page 241 — *ligne 14 :* Lire « $f'(x) = \dfrac{-16\,\pi^2 x}{(1+4\pi^2x^2)^2}$ » et « $f''(x) = \dfrac{192\,\pi^4x^2 - 16\,\pi^2x^2}{(1+4\pi^2x^2)^3}$ ».

Page 244 — *ligne 6 :* Lire « $\lim\limits_{\mathrm{R}\to+\infty}\left\{\Big[f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\Big]_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} + \displaystyle\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}(2\mathrm{i}\pi\nu)\,f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x\right\}$ ».
ligne 9 : Remplacer « $(-2\mathrm{i}\nu x)$ » par « $2\mathrm{i}\pi\nu$ ».

Page 256 — *ligne −4 :* Lire « T est une fonctionnelle sur $\mathscr{D}$ » et non « sur $\mathscr{S}$ ».

Page 261 — *ligne −3 :* Lire « $\mathrm{F}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}) = \frac{(2\pi)^3}{\mathrm{R}}\,\delta(\boldsymbol{k}) + \dots$ ».

Page 357 — *lignes −9 et −3 :* Remplacer « $\mathscr{E}^{\otimes p} \otimes \mathscr{E}^{\otimes q}$ » par « $\mathscr{E}^{\otimes p} \otimes \mathscr{E}^{*\otimes q}$ ».

Page 358 — *lignes 13–14 :* Remplacer la fin de la définition d'une pseudo-métrique par « ...forme bilinéaire *symétrique* et *définie* (le seul vecteur $\mathbf{u}$ vérifiant $\mathfrak{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathscr{E}$ est le vecteur nul) ; $\mathfrak{g}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ peut être de signe quelconque (ou nul). »

Page 370 — *ligne 19 :* Remplacer dans ce paragraphe toutes les occurrences du mot « flux » par le mot « courant ».

Page 374 — *lignes −14, −9 et −7 :* L'enthousiasme déclenché par la découverte de la fonction « copier-coller » m'a fait écrire plusieurs fois « $\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ ». Il faut bien sûr lire « $\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i$ ».

Page 377 — *ligne −2 :* Des « ω^1 » se sont changés en « ω^2 ». Lire

$$\text{« } \omega^2 \wedge \omega^1(a,b,c) = 2\omega^2(a,b)\,\omega^1(c) + 2\omega^2(b,c)\,\omega^1(a) + 2\omega^2(c,a)\,\omega^1(b). \text{ »}$$

Page 378 — *ligne 2 :* Lire « $\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq}\omega^q \wedge \omega^p$ » au lieu de « $(-1)^{pq}\omega' \wedge \omega$ ».

Page 384 — Contre-exemple 16.48 Lire « $\omega = \dfrac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ ».

Page 396 — Des symboles ont disparu dans la figure à l'impression. Voir page 9.

Page 402 — *lignes 13 et 15 :* Les relations sont $[\mathrm{J}_1,\mathrm{J}_2] = -\mathrm{J}_3$ etc, soit

$$\boxed{[\mathrm{J}_i,\mathrm{J}_j] = -\varepsilon_{ijk}\mathrm{J}_k}.$$

Page 404 — *ligne 20 :* Lire « matrices *hermitiennes* » et non « symétriques ».

Page 407 — *ligne 8 :* Lire « $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+2\pi)\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}$ ».

Page 408 — *théorème 17.24 et figure :* Lire « $z = \overline{\lambda/\mu}$ » et non « $z = \lambda/\mu$ ».
ligne −7 : Lire « $|\!\leftarrow\rangle = |\!\uparrow\rangle - |\!\downarrow\rangle$ ».

Page 409 — Une erreur (bénigne) apparaît dans les figures 2 à 7 ; elle ne compromet en rien le raisonnement, mais les figures correctes sont proposées en fin d'errata.

Page 412 — *ligne −2 :* Lire « Un nombre possédant la propriété P est dit **normal** ».

Page 468 — *ligne 5 :* Lire « $f^{-1}(\mathrm{O}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathrm{X}\,;\ f(x) \in \mathrm{O}\}$ ».
ligne 8 : Lire « quel que soit $x \in \mathrm{E}$ » et non « $x \in \mathrm{A}$ ».

Page 471 — *lignes 16 et 18 :* Lire « $x \in \mathrm{A}$ » et non « $x \in \mathrm{E}$ ».
ligne -2 : Lire « $\exists r > 0$ » et non « $\forall r > 0$ ».

Page 473 — *ligne 5 :* Lire « ...il existe un réel A non nul et un entier N tels que $\|u_n\| \leqslant \mathrm{A}\,|\alpha_n|$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. »

Page 480 — *ligne −9 :* Remplacer la condition « $\mathrm{Ker}\,\phi_i \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ pour $i \in [\![1\,;k]\!]$ » par la condition « $\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}\,\phi_i \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ ». Le théorème était certes vrai, mais pas très intéressant !

Page 481 — *ligne −8 :* De même, lire « $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\mathrm{dC}_{\boldsymbol{a}}^{(i)} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{dF}_{\boldsymbol{a}}$ ».

Dans tout ce paragraphe, on écrira les variables d'espace et de temps sous forme covariante, c'est-à-dire que l'on posera $\mathbf{x} = (ct, \boldsymbol{x}) = (x_0, \boldsymbol{x})$ et $\mathbf{p} = (p_0, \boldsymbol{p})$. On choisira la métrique minkowskienne de signature $(+,-,-,-)$, c'est-à-dire que l'on posera

$$\mathbf{p}^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2, \qquad \mathbf{x}^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 \qquad \text{et} \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle.$$

Remarque 0.1 Attention au signe du d'Alembertien : il est opposé à celui du paragraphe ?? ; il est ainsi conforme aux usages relativistes où l'on note généralement $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$.

On cherche à résoudre une équation (issue de la théorie des champs) du type

$$(\Box + m^2)\,\phi(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}),$$

appelée **équation de Klein-Gordon** pour le champ ϕ. Dans cette équation, m représente la masse d'une particule, j une source quelconque et ϕ est un champ que l'on cherche à déterminer. Les constantes $\hbar$ et c ont été prises identiquement égales à 1, comme c'est l'habitude[a].

Afin d'harmoniser les notations avec celles qui sont habituelles en théorie des champs, on notera les transformations de Fourier et inverse ainsi :

$$\widetilde{f}(\mathbf{p}) = \int f(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^4\mathbf{x} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \widetilde{f}(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^4\mathbf{p}.$$

a. Il faudrait sinon écrire $(\hbar^2 c^2 \Box + m^2 c^2)\,\phi = j$.

On commence par chercher à résoudre l'équation où le terme de source est remplacé par une distribution de Dirac ; on appellera **propagateur** la fonction de Green de cette équation :

$$(\Box + m^2)\,\mathrm{G}(\mathbf{x}) = \delta^4(\mathbf{x}).$$

En passant en transformée de Fourier, on obtient donc

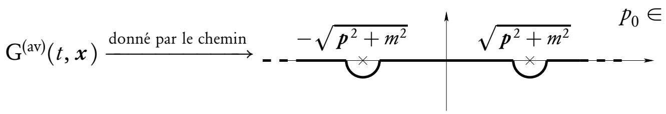
$$(-\mathbf{p}^2 + m^2)\,\mathscr{G}(\mathbf{p}) = 1,$$

soit
$$\mathscr{G}(\mathbf{p}) = \frac{-1}{\mathbf{p}^2 - m^2} = \frac{-1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}.$$

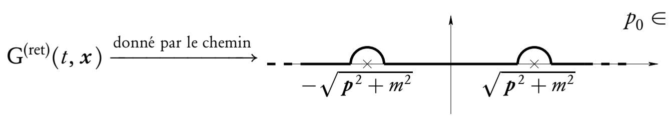
Or, comme dans le cas de l'électromagnétisme, on va avoir un problème avec ce dénominateur en prenant la transformée de Fourier inverse. En effet, on cherchera à écrire une équation du type

$$\mathrm{G}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \iiiint \frac{1}{p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}p_0.$$

Lors de l'intégration sur la variable p_0, nous nous heurterons à deux pôles en $p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Il faut donc contourner ces deux pôles en considérant que désormais p_0 est une variable du plan complexe et en effectuant l'intégrale portant sur p_0 sur un chemin déformé (cf. paragraphe ??).
On peut par exemple les contourner tous les deux par le bas, ce qui définit la fonction de Green avancée :



Cela revient également à ajouter une partie imaginaire *négative* à p_0, si l'on désire intégrer d'abord sur $\boldsymbol{p}$.
De même, on définit une fonction de Green retardée, en contournant les deux pôles par le haut ; ou, ce qui revient au même, en ajoutant une petite partie imaginaire *positive* à p_0.



On posera donc

$$\mathscr{G}^{(\mathrm{av})}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{-1}{(p_0 - \mathrm{i}\varepsilon)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \quad \text{et} \quad \mathscr{G}^{(\mathrm{ret})}(\mathbf{p}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{-1}{(p_0 + \mathrm{i}\varepsilon)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}.$$

En prenant les transformées de Fourier inverses, on obtient

$$\mathrm{G}^{(\mathrm{av})/(\mathrm{ret})}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \iiiint \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(p_0 \mp \mathrm{i}\varepsilon)^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2}\, \mathrm{d}^4\mathbf{p}.$$

D'après le théorème des résidus, la fonction $\mathrm{G}^{(\mathrm{ret})}$ est nulle pour $t < 0$ et $\mathrm{G}^{(\mathrm{av})}$ est nulle pour $t > 0$. De plus, ces fonctions de Green étant définies par des invariants de Lorentz, on en déduit que $\mathrm{G}^{(\mathrm{ret})}$ est nulle en dehors du cône de lumière futur (on dit qu'elle est

causale au sens relativiste) et $\mathrm{G}^{(\mathrm{ret})}$ en dehors du cône de lumière passé. On note également que ces deux fonctions sont réelles (malgré l'introduction du $\mathrm{i}\varepsilon$) et que $\mathrm{G}^{(\mathrm{ret})}(-\mathbf{x}) = \mathrm{G}^{(\mathrm{av})}(\mathbf{x})$.
Alors que, dans le cas $m^2 = 0$ de l'électromagnétisme[a], on avait une expression explicite simple des fonctions de Green, ici des fonctions de Bessel apparaissent après intégration sur la variable $\boldsymbol{p}$; le calcul complet n'étant pas vraiment propre à développer l'intuition, nous le laissons de côté. On notera simplement que ces fonctions de Green ne sont plus concentrées sur le cône de lumière comme dans l'équation (??) (cas $m^2 = 0$) ; on a également propagation de signaux de vitesse inférieure à la vitesse de la lumière. C'est bien sûr cohérent avec une masse non nulle !
On note, pour clore ce très bref paragraphe (le lecteur est renvoyé à [?] pour un panorama plus étendu des propriétés des fonctions de Green de l'équation de Klein-Gordon), qu'il est possible d'introduire une fonction de Green complètement différente, en suivant Stueckelberg et Feynman : on pose

$$\mathscr{G}_{\mathrm{F}}(\mathbf{p}) = \frac{-1}{\mathbf{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}.$$

De la formule, valable au premier ordre en ε :

$$x^2 - \alpha^2 + \mathrm{i}\varepsilon \approx \left(x + \alpha - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2\alpha}\right)\left(x - \alpha + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2\alpha}\right),$$

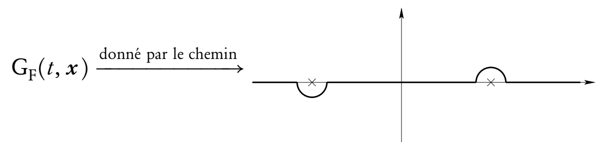
on déduit que changer m^2 en $m^2 - \mathrm{i}\varepsilon$ revient à changer les pôles

$$p_0^{(1)} = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \qquad \text{et} \qquad p_0^{(2)} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

en, respectivement

$$-\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} + \mathrm{i}\varepsilon' \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - \mathrm{i}\varepsilon'$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon/2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, ou bien à prendre le contour d'intégration suivant :



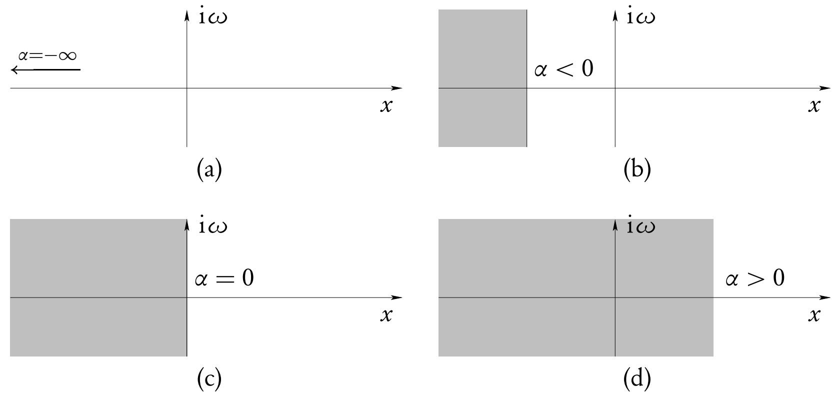
Cette dernière fonction de Green, appelée **propagateur de Feynman**[b]est complexe et vérifie bien $(-\Box + m^2)\,\mathrm{G}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, ainsi que la relation $\mathrm{G}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}) = \mathrm{G}_{\mathrm{F}}(-\mathbf{x})$. De plus, il est possible de montrer (voir [?]) que ce propagateur n'est pas nul à l'extérieur du cône de lumière (c'est-à-dire notamment que $\mathrm{G}_{\mathrm{F}}(0, \boldsymbol{r})$ n'est pas identiquement nul pour les valeurs de $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$, contrairement à ce qui se passe avec les fonctions « avancée » et « retardée »).
Pourquoi n'apparaît-elle pas... *etc.*

a. Qui est bien une théorie des champs à masse nulle !
b. Richard Phillips FEYNMAN (1918-1988), physicien américain, est l'un des inventeurs de l'électrodynamique quantique (la théorie quantique relativiste de l'électromagnétisme), considérée par beaucoup comme « une des plus belles théories physiques à l'heure actuelle ». Doué d'un esprit pénétrant et d'un sens physique particulièrement aigu et clair, il simplifie les méthodes perturbatives quantiques et invente les diagrammes qui portent son nom, fort utiles pour mener des calculs *et* les comprendre. Il est également grand pédagogue. Son cours de physique est indispensable à lire et son autobiographie [?] est drôle et instructive à de nombreux points de vue.

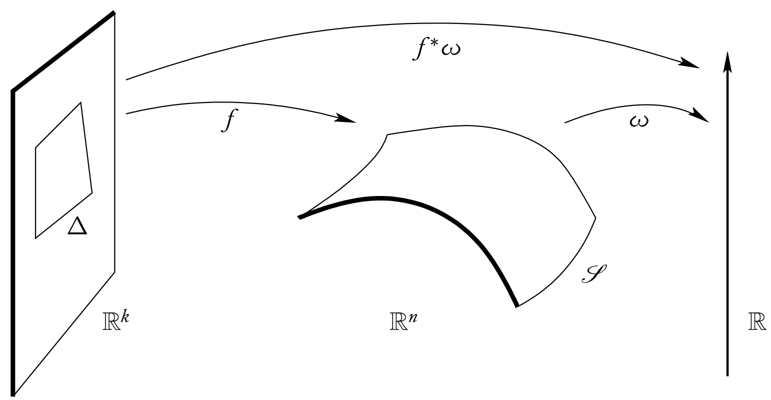
Page 355 — *lignes 11, 12 et −7 :* Remplacer « $\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{E}$ » par « $\mathscr{E}^* \times \mathscr{E}$ ».

Figures

Page 289 —



Page 396 —



Page 410 –