Mines Mathématiques MPSI — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Desreux (ENS Ulm) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm).

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Dans le premier problème, consacré à l'algèbre, on étudie dans la partie I les images et noyaux d'endomorphismes définis par des matrices comportant des paramètres. Les résultats sont ensuite utilisés pour l'étude d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, dont on calcule explicitement le noyau après avoir passé en revue deux cas particuliers pour se familiariser avec la définition.

Dans le second problème, consacré à l'analyse, on étudie dans la partie I la fonction

$$x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$$

et on montre en particulier qu'elle est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La partie II est consacrée à une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. On étudie la continuité, le sens de variation et les limites aux bornes du domaine de définition.

Indications

Premier problème

I.1.a Utiliser la règle de Sarrus.

I.1.b Il faut résoudre explicitement l'équation $\mathrm{AX} = 0$.

I.1.c Utiliser le théorème du rang.

II.A.1 On montre d'abord que φ est linéaire, puis que le coefficient de X^{n+1} est nul dans l'expression de $\varphi(\mathrm{P})$.

II.A.2.a Il suffit de calculer l'image des vecteurs de base.

II.A.2.b Faire le lien avec la matrice A de la première partie.

II.B.1.a Montrer par l'absurde que Q et Q' n'ont pas de racine commune.

II.B.1.b Utiliser la définition de φ et le lemme de Gauss.

II.B.1.c Considérer $\{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{Q}^i \text{ divise } \mathrm{P}\}$.

II.B.1.d Réinjecter la relation $\mathrm{P} = \mathrm{RQ}^k$ dans la définition de φ.

II.B.1.e Remarquer que si n est pair et $\mathrm{P} = \mathrm{RQ}^k \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $k = n/2$ en réinjectant la relation $\mathrm{P} = \mathrm{RQ}^k$ dans la définition de φ.

II.B.2.a Utiliser la définition de φ.

II.B.2.b Réinjecter la relation $\mathrm{P} = \mathrm{R} \times (\mathrm{X} - \alpha)^k$ dans la définition de φ.

II.b.3 Remarquer que $(\mathrm{X}^2+1)\mathrm{R}' - n\mathrm{XR} = \dfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{R})$ lorsqu'on choisit $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2+1$.

Deuxième problème

I.3 On pourra introduire la fonction auxiliaire

$$x \longmapsto \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

I.5 Montrer d'abord par un DL que φ peut être prolongée en 0, puis que φ' peut elle aussi être prolongée en 0.

II.2 Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(1 + x \sin t)$.

II.3 Utiliser les règles de Bioche puis remarquer que

$$\frac{2u}{1+xu} = \frac{2}{x} \times \left(1 - \frac{1}{1+xu}\right)$$

II.4 Pour majorer l'intégrale définissant $g(x) - g(y)$, constater que $1 + x \sin t \geqslant 1 + a \sin t$ dès que $a > -1$. Reconnaître alors une fonction lipschitzienne.

II.5 Montrer que $g(x) - g(y)$ est du signe de $y - x$ en constatant que toutes les fonctions qui interviennent dans l'intégrale sont positives.

II.6.b Utiliser la relation de Chasles pour « insérer » la borne b, puis majorer chacune des deux intégrales. On pourra montrer que $1 + x \sin t \geqslant 1 + x \sin b$ pour $t \in [\, b\,; \pi/2\,]$.

II.6.c On utilise la majoration trouvée à la question précédente : l'un des termes tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$, l'autre peut être rendu arbitrairement petit en choisissant convablement b.
Un choix judicieux de b est $\operatorname{Min}\left(\dfrac{\pi}{2}\,, \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}\right)$.

II.8.b Utiliser la question II.2 puis la question I.4 et enfin la contraposée du résultat admis.

Premier Problème

I. Études d'endomorphismes donnés par leur matrice

I.1.a Le déterminant de f est égal à celui de A, que l'on calcule avec la règle de Sarrus :

$$\det \mathrm{A} = 0 + 0 + 0 + 0 - 2uv + 2uv = 0$$

> Pour retenir la règle de Sarrus, il suffit de se dire que l'on « descend » les diagonales dans un sens, puis qu'on les « remonte » dans l'autre. Et lorsqu'on change de sens, on change de signe :
>
> $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

I.1.b Ker f n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\det f = 0$. Un polynôme $a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ appartient à Ker f si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} -au + bv & = 0 \\ -2a \quad + 2cv & = 0 \\ \quad - b + cu & = 0 \end{cases}$$

En partant de la troisième ligne, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} b = uc & \mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_3 \\ a = vc & \\ au = bv & \mathrm{L}_3 \longleftrightarrow \mathrm{L}_1 \end{cases}$$

La troisième ligne se déduit des deux premières, donc

$$\mathrm{Ker}\ f = \{c(v + u\mathrm{X} + \mathrm{X}^2) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Autrement dit, Ker f est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est

$$\boxed{(v + u\mathrm{X} + \mathrm{X}^2)}$$

I.1.c D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f,

$$\dim \mathrm{Im}\ f = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \dim \mathrm{Ker}\ f = 3 - 1 = 2$$

> Les espaces de polynômes sont souvent sources d'erreur. Il faut absolument savoir que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est l'espace des polynômes de degré au plus n (et non l'ensemble des polynômes de degré exactement n, qui n'est pas un espace vectoriel), et que sa dimension est $n+1$ (et non n) puisqu'une base en est $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$.

Pour déterminer une base de Im f, il suffit de déterminer une famille libre à deux éléments de Im f. D'après l'expression matricielle de f, on voit que

$$f(1) = -u - 2\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad f(\mathrm{X}) = v - \mathrm{X}^2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels puisqu'ils n'ont pas le même degré : une base de Im f est donc

$$\boxed{(u + 2\mathrm{X}, v - \mathrm{X}^2)}$$

> Plus généralement, une famille de polynômes ayant tous des degrés distincts (ou tous des valuations distinctes) est libre. On a même un peu mieux : si $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une famille de polynômes vérifiant $\deg \mathrm{P}_k = k$ (ou $\mathrm{val}\ \mathrm{P}_k = k$) pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ alors c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
>
> Par exemple, $(1, 1+\mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ et $(\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2+\mathrm{X}, \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

I.2.a On va calculer $\det g = \det \mathrm{B}$ en développant par rapport à la première colonne. Pour simplifier les calculs, on commence par soustraire la première ligne à la deuxième et additionner la quatrième à la troisième, ce qui fait apparaître deux 0 :

$$\det \mathrm{B} = \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -w-1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3w+3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathrm{B} = -3 \times \begin{vmatrix} -w-1 & 2w & 0 \\ -2 & 0 & 3w+3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} w+1 & 2w & 0 \\ 2 & 0 & 3w+3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant se calcule avec la règle de Sarrus :

$$\det \mathrm{B} = 3\left[3(w+1)^2 - 12w\right] = 9(w^2 + 2w + 1 - 4w)$$

$$\boxed{\det \mathrm{B} = 9(w-1)^2}$$

Ce déterminant s'annule lorsque $w = w_0 = 1$.

I.2.b Lorsque $w = 1$, un polynôme $a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$ appartient à Ker g si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} -3a + b & = 0 \\ -3a - b + 2c & = 0 \\ -2b + c + 3d & = 0 \\ -c + 3d & = 0 \end{cases}$$

En partant de la dernière ligne, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3}\, b = d \\ a = \dfrac{1}{3}\,(2c - b) = d \\ b = \dfrac{1}{2}\,(c + 3d) = 3d \\ c = 3d \end{cases}$$

On a donc $\qquad \operatorname{Ker} g = \{d(1 + 3\mathrm{X} + 3\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3) \mid d \in \mathbb{R}\}$

ce qui montre que Ker g est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est

$$\boxed{((\mathrm{X}+1)^3)}$$

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

A Étude de cas particuliers

II.A.1 Montrons d'abord que φ est une application linéaire. Étant donné un réel λ et deux polynômes $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il suffit de montrer que $\varphi(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2) = \lambda\varphi(\mathrm{P}_1) + \varphi(\mathrm{P}_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2) &= 2(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)'\mathrm{Q} - n(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)\mathrm{Q}' \\ &= 2(\lambda \mathrm{P}_1' + \mathrm{P}_2')\mathrm{Q} - n(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)\mathrm{Q}' \\ &= \lambda(2\mathrm{P}_1'\mathrm{Q} - n\mathrm{P}_1\mathrm{Q}') + (2\mathrm{P}_2'\mathrm{Q} - n\mathrm{P}_2\mathrm{Q}') \\ \varphi(\lambda \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2) &= \lambda\varphi(\mathrm{P}_1) + \varphi(\mathrm{P}_2) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, c'est-à-dire que $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Si P est de degré au plus n, alors $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$ et $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$ sont de degré au plus $n+1$ puisque Q est de degré 2.

> Le principe de la preuve est de montrer que le coefficient de X^{n+1} dans l'expression de $\varphi(P)$ est nul. Pour cela, il faut calculer explicitement ce coefficient, mais il n'est pas indispensable d'utiliser tous les coefficients de P et de Q : distinguer leur terme de plus haut degré possible suffit.

Il existe un réel c_n (éventuellement nul) et un polynôme $\widetilde{P}$ de degré au plus $n-1$ tels que

$$P = c_n X^n + \widetilde{P}$$

De même, il existe un réel (non nul) γ et un polynôme $\widetilde{Q}$ de degré au plus 1 tels que

$$Q = \gamma X^2 + \widetilde{Q}$$

Avec ces notations, on a

$$P' = nc_n X^{n-1} + \widetilde{P}' \qquad \text{et} \qquad Q' = 2\gamma X + \widetilde{Q}'$$

donc $\qquad \varphi(P) = 2(nc_n X^{n-1} + \widetilde{P}')(\gamma X^2 + \widetilde{Q}) - n(c_n X^n + \widetilde{P})(2\gamma X + \widetilde{Q}')$

On distingue les termes susceptibles de donner un polynôme de degré $n+1$:

$$\varphi(P) = (2nc_n X^{n-1} \times \gamma X^2) - n(c_n X^n \times 2\gamma X) + \widehat{P}$$

où $\widehat{P}$ est un polynôme de degré au plus n.

Comme $\qquad (2nc_n X^{n-1} \times \gamma X^2) - n(c_n X^n \times 2\gamma X) = 0\,,$

on a montré que $\varphi(P)$ est toujours un polynôme de degré au plus n, c'est-à-dire que

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

II.A.2.a Pour déterminer la matrice de φ sur la base $(1, X, X^2)$, il suffit de calculer les images de 1, X et X^2 par φ, ce qui fournit les vecteurs de la matrice.

> Si θ est un endomorphisme de E dont une base est $e = (e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de u dans la base e est obtenue en « accolant » les vecteurs images par θ des éléments de la base, ce que l'on note
>
> $$\mathrm{Mat}_e(\theta) = (\theta(e_1) \mid \theta(e_2) \mid \cdots \mid \theta(e_n))$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= -2 \times (2X + u) = -2u - 4X \\
\varphi(X) &= 2(X^2 + uX + v) - 2X(2X + u) = 2v - 2X^2 \\
\varphi(X^2) &= 4X(X^2 + uX + v) - 2X^2(2X + u) = 4vX + 2uX^2
\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\qquad \mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2u & 2v & 0 \\ -4 & 0 & 4v \\ 0 & -2 & 2u \end{pmatrix}$

On constate que $\qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)}(\varphi) = 2\mathrm{A}}$

II.A.2.b Puisque $\varphi = 2f$ lorsque $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + u\mathrm{X} + v$,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\,\{(v + u\mathrm{X} + \mathrm{X}^2)\} = \mathbb{R}\,\mathrm{Q}}$$

II.A.3.a Il suffit comme précédemment de calculer les images de 1, X, X^2 et X^3 par φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= -3(2\mathrm{X}+2) = -6 - 6\mathrm{X} \\
\varphi(\mathrm{X}) &= 2(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + w) - 3\mathrm{X}(2\mathrm{X}+2) = 2w - 2\mathrm{X} - 4\mathrm{X}^2 \\
\varphi(\mathrm{X}^2) &= 4\mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + w) - 3\mathrm{X}^2(2\mathrm{X}+2) = 4w\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}^3 \\
\varphi(\mathrm{X}^3) &= 6\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + w) - 3\mathrm{X}^3(2\mathrm{X}+2) = 6w\mathrm{X}^2 + 6\mathrm{X}^3
\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\qquad \mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} -6 & 2w & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 4w & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 6w \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

On constate que $\qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)}(\varphi) = 2\mathrm{B}}$

II.A.3.b Puisque $\varphi = 2g$ lorsque $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + w$, $\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ g$. L'étude faite à la question I.2.b permet de conclure sans nouveau calcul que

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ \varphi = \begin{cases} \mathbb{R}(\mathrm{X}+1)^3 & \text{si } w = 1 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}}$$

(Lorsque $w \neq 1$, $\det \varphi \neq 0$.)

B. Étude du cas général

II.B.1.a Montrons que Q et Q′ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd vaut 1. Pour cela, il suffit de montrer qu'ils n'ont pas de racine en commun. On raisonne par l'absurde.

Soit r une racine commune à Q et Q′. Puisque Q est de degré 2, s'il admet une racine, il en admet une deuxième (éventuellement confondue avec la première). Il existe donc deux réels r' et α tels que $\mathrm{Q} = \alpha(\mathrm{X} - r)(\mathrm{X} - r')$. Dans ces conditions,

$$\mathrm{Q}' = \alpha(\mathrm{X} - r + \mathrm{X} - r') = 2\alpha\left(\mathrm{X} - \frac{r + r'}{2}\right)$$

Par hypothèse, r est racine de Q, donc r' doit être égal à r : mais alors r serait une racine double de Q, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.
On en déduit que Q et Q′ n'ont pas de racine en commun, puis

$$\boxed{\operatorname{pgcd}(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}') = 1}$$

On a montré un cas particulier du résultat plus général suivant : si P est un polynôme pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha_1)^{r_1} \cdots (\mathrm{X} - \alpha_p)^{r_p}$$

où les α_i sont des complexes distincts et $r_i \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, alors

$$\operatorname{pgcd}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = (\mathrm{X} - \alpha_1)^{r_1 - 1} \cdots (\mathrm{X} - \alpha_p)^{r_p - 1}$$

En effet, $$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{r_1}{\mathrm{X} - \alpha_1} + \cdots + \frac{r_p}{\mathrm{X} - \alpha_p}$$

Or chaque $\dfrac{r_i \mathrm{P}}{\mathrm{X} - \alpha_i}$ est divisible par chaque $(\mathrm{X} - \alpha_k)^{r_k - 1}$, et par suite P′ l'est également (premier sens) ; d'autre part, si $(\mathrm{X} - \beta)^s$ divise P′ alors il divise chacun des $\dfrac{r_i \mathrm{P}}{\mathrm{X} - \alpha_i}$, ce qui montre que $\beta = \alpha_j$ pour un certain j (d'après l'unicitié de la décomposition sur $\mathbb{C}$), et s doit être strictement inférieur à r_j puisque $(\mathrm{X} - \alpha_j)^{r_j}$ ne divise pas $\dfrac{r_j \mathrm{P}}{\mathrm{X} - \alpha_j}$ (deuxième sens).

En particulier, si toutes les racines de P sont simples, $\operatorname{pgcd}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = 1$.

II.B.1.b $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si $2\mathrm{P}'\mathrm{Q} - n\mathrm{P}\mathrm{Q}' = 0$, soit

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q} = \frac{n}{2}\mathrm{P}\mathrm{Q}'$$

Par suite Q divise PQ′. D'après la question précédente, Q est premier avec Q′, donc il divise P d'après le lemme de Gauss.

II.B.1.c Considérons

$$\mathcal{E} = \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{Q}^i \text{ divise } \mathrm{P}\}$$

Cet ensemble n'est pas vide car il contient $i = 1$ d'après la question précédente. De plus, il ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments puisque $\deg \mathrm{Q}^i$ (pour $i \in \mathcal{E}$) ne peut dépasser $\deg \mathrm{P}$ (P étant fixé). Par suite, $\mathcal{E}$ admet un plus grand élément, que l'on note k.

Par construction, Q^k divise P et Q^{k+1} ne divise pas P. Par division euclidienne de P par Q^k, il existe un polynôme R, non divisible par Q, tel que

$$\mathrm{P} = \mathrm{R}\mathrm{Q}^k$$

Ce qu'il fallait démontrer.

> Une méthode peut-être plus intuitive, mais certainement moins élégante, consiste à raisonner par récurrence : si $\mathrm{Q}|\mathrm{P}$, alors il existe par division euclidienne un polynôme P_1 tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mathrm{P}_1$. Si ce polynôme P_1 est lui aussi divisible par Q, il existe P_2 tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}^2\mathrm{P}_2$, etc. On sait que le processus doit s'arrêter puisque $\deg \mathrm{Q}^i$ doit rester inférieur à $\deg \mathrm{P}$.

II.B.1.d Supposons $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0\}$. Il existe alors P, R et k vérifiant les mêmes conditions qu'a la question précédente, et en particulier $\mathrm{P} = \mathrm{R}\mathrm{Q}^k$. Puisque ce polynôme appartient à $\operatorname{Ker} \varphi$, il vérifie

$$0 = 2(\mathrm{R}\mathrm{Q}^k)'\mathrm{Q} - n(\mathrm{R}\mathrm{Q}^k)\mathrm{Q}'$$

soit
$$0 = 2\mathrm{R}'\mathrm{Q}^{k+1} + 2k\mathrm{R}\mathrm{Q}^k\mathrm{Q}' - n\mathrm{R}\mathrm{Q}^k\mathrm{Q}'$$

ou encore
$$0 = (2\mathrm{R}'\mathrm{Q} + \mathrm{R}\mathrm{Q}'(2k - n))\mathrm{Q}^k$$

Comme Q n'est pas nul (puisqu'il est de degré 2), cette équation est équivalente à

$$2\mathrm{R}'\mathrm{Q} = \mathrm{R}\mathrm{Q}'(n - 2k) \qquad (\mathbf{1})$$

Or Q est premier avec Q' (question II.B.1.a) et Q ne divise pas R (par hypothèse) : puisqu'il divise $\mathrm{R}\mathrm{Q}'(n - 2k)$ c'est que $n - 2k = 0$, c'est-à-dire que n est pair.

> Ici on pouvait être tenté de raisonner par l'absurde : si $n \neq 2k$ alors Q divise $\mathrm{R}\mathrm{Q}'$, mais cela est absurde puisque Q ne divise ni R ni Q' (par les mêmes arguments).
>
> Il faut résister à la tentation, car on voit bien que dans ce genre de question le raisonnement par l'absurde n'apporte strictement rien. Les correcteurs le considèrent alors comme une maladresse. Inversement, savoir poursuivre le raisonnement dans le « sens direct » jusqu'à son terme est toujours apprécié.

II.B.1.e Commençons par le cas facile : si n est impair, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ par contraposée du résultat précédent. On suppose désormais n pair.

Supposons que Ker φ ne soit pas réduit à $\{0\}$. Pour tout polynôme non nul P de Ker φ, il existe alors un polynôme R et un entier k vérifiant les mêmes propriétés qu'à la question II.B.1.c, et en particulier $\mathrm{P} = \mathrm{R}\mathrm{Q}^k$. L'équation (**1**) de la question précédente montre que $k = n/2$, d'où l'on tire $\mathrm{R}'\mathrm{Q} = 0$. Or Q n'est pas nul puisqu'il est de degré 2 : on en déduit que $\mathrm{R}' = 0$, c'est-à-dire que R est une constante.

On a donc montré que si Ker φ n'est pas vide, tous ses éléments sont de la forme $\lambda \mathrm{Q}^{\frac{n}{2}}$.

Réciproquement, si $n = 2p$, on vérifie que $\mathrm{Q}^p \in \operatorname{Ker} \varphi$:

$$2(\mathrm{Q}^p)'\mathrm{Q} - 2p(\mathrm{Q}^p)\mathrm{Q}' = 2p\mathrm{Q}'\mathrm{Q}^{p-1}\mathrm{Q} - 2p\mathrm{Q}^p\mathrm{Q}' = 0$$

En conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \begin{cases} \{0\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \mathbb{R}\mathrm{Q}^{\frac{n}{2}} & \text{sinon} \end{cases}}$

II.B.2.a Supposons qu'il existe deux réels α et λ tels que $\mathrm{Q} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha)^2$ ($\lambda \neq 0$ par hypothèse). On a alors

$$\varphi(\mathrm{P}) = 2\mathrm{P}'\lambda(\mathrm{X} - \alpha)^2 - n\mathrm{P}2\lambda(\mathrm{X} - \alpha) = 2\lambda(\mathrm{X} - \alpha)[(\mathrm{X} - \alpha)\mathrm{P}' - n\mathrm{P}]$$

On en déduit que $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si

$$\mathrm{P} = \frac{1}{n}(\mathrm{X} - \alpha)\mathrm{P}'$$

ce qui implique en particulier que $\mathrm{X} - \alpha$ divise P, c'est-à-dire que α est une racine de P.

> Au lieu d'utiliser la divisibilité, on peut aussi prendre $\mathrm{X} = \alpha$ dans la relation, ce qui montre $\mathrm{P}(\alpha) = 0$.

II.B.2.b Considérons un polynôme non nul $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \varphi$. D'après la question précédente, $\mathrm{P}(\alpha) = 0$. Notons k l'ordre de multiplicité de la racine α dans le polynôme P : il existe un polynôme R, dont α n'est pas racine, tel que

$$\mathrm{P} = \mathrm{R} \times (\mathrm{X} - \alpha)^k$$

Puisque $\mathrm{Q} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha)^2$, $\mathrm{Q}' = 2\lambda(\mathrm{X} - \alpha)$ et $\varphi(\mathrm{P}) = 0$, on a

$$0 = 2(\mathrm{R}'(\mathrm{X} - \alpha)^k + k\mathrm{R}(\mathrm{X} - \alpha)^{k-1})\lambda(\mathrm{X} - \alpha)^2 - n\mathrm{R}(\mathrm{X} - \alpha)^k 2\lambda(\mathrm{X} - \alpha)$$

soit, en simplifiant par $2\lambda(\mathrm{X} - \alpha)^{k+1}$:

$$0 = \mathrm{R}'(\mathrm{X} - \alpha) + k\mathrm{R} - n\mathrm{R}$$

ou encore $$(\mathrm{X}-\alpha)\mathrm{R}' = (n-k)\mathrm{R}$$

Cette égalité devant être en particulier vraie pour $\mathrm{X}=\alpha$, $(n-k)\mathrm{R}(\alpha)=0$. Or α n'est pas racine de R par hypothèse, donc $k=n$. Mais alors $(\mathrm{X}-\alpha)\mathrm{R}'=0$, d'où $\mathrm{R}'=0$: R est une constante.

> À partir de $k=n$, il existe une autre méthode pour montrer que R est constant : puisque $\mathrm{P}=\mathrm{R}(\mathrm{X}-\alpha)^n$ et $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ (car $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$), $\deg\ \mathrm{R}=0$; en d'autre mots, R est un polynôme constant.

On a montré que si $\mathrm{P}\in\operatorname{Ker}\varphi$, il existe une constante μ telle que $\mathrm{P}=\mu(\mathrm{X}-\alpha)^n$.

Réciproquement, $(\mathrm{X}-\alpha)^n$ appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$ puisque

$$2n(\mathrm{X}-\alpha)^{n-1}\lambda(\mathrm{X}-\alpha)^2 - n(\mathrm{X}-\alpha)^n 2\lambda(\mathrm{X}-\alpha)=0$$

En conclusion : $$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi=\mathbb{R}(\mathrm{X}-\alpha)^n}$$

II.B.3 Le polynôme $(\mathrm{X}^2+1)\mathrm{R}'-n\mathrm{XR}$ est égal à $\dfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{R})$ lorsque $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^2+1$. On note pour la suite $\widetilde{\varphi}=\dfrac{1}{2}\varphi$ et on se place dans le cas $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^2+1$.

Puisque n est impair, $\operatorname{Ker}\varphi$ est réduit au vecteur nul d'après la question II.B.1.d : φ est injectif. Or φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (question II.A.1), et en dimension finie tout endomorphisme injectif est aussi bijectif. Par suite, φ et $\widetilde{\varphi}$ sont bijectifs. Ceci montre qu'étant donné un polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il existe un unique R de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}=\widetilde{\varphi}(\mathrm{R})$, avec $\widetilde{\varphi}(\mathrm{R})=(\mathrm{X}^2+1)\mathrm{R}'-n\mathrm{XR}$.

L'application $\mathrm{P}\longmapsto\mathrm{R}$ est la bijection réciproque $\widetilde{\varphi}$: c'est donc une application linéaire.

Deuxième problème

I.1 φ est définie sur $\mathcal{D} = \left]-1\,;+\infty\right[\setminus \{0\}$.

I.2 φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont, avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}$$

I.3 φ' a le même signe sur $\mathcal{D}$ que

$$\psi\colon \begin{cases} \left]-1\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} - \ln(1+x) \end{cases}$$

ψ est dérivable sur $\left]-1\,;+\infty\right[$, avec

$$\psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

On en déduit que ψ est croissante sur $\left]-1\,;0\right]$, et décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$. Elle atteint donc un maximum en $x=0$, et ce maximum vaut $\psi(0)=0$: ψ est donc négative sur $\mathcal{D}$, et φ' également.

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \qquad \varphi'(x) \leqslant 0}$$

I.4

- $\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$.
- En 0, $\ln(1+x) = x + \mathrm{o}\,(x)$ donc $\varphi(x) = 1 + \mathrm{o}\,(1)$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to0^+} \varphi(x) = 1$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ d'après la croissance comparée des fonctions logarithme et puissance.

I.5 Les limites à gauche et à droite de φ étant toutes deux égales à 1, on peut prolonger φ par continuité en 0 par la valeur 1.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont. Il reste à montrer que la fonction dérivée de φ sur $\mathcal{D}$ est prolongeable par continuité en 0. En premier lieu, on calcule la dérivée en 0 de la fonction prolongée par la méthode du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} &= \frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-1\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[-\frac{x}{2}+\mathrm{o}\left(x\right)\right] \\
\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} &= -\frac{1}{2}+\mathrm{o}\left(1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

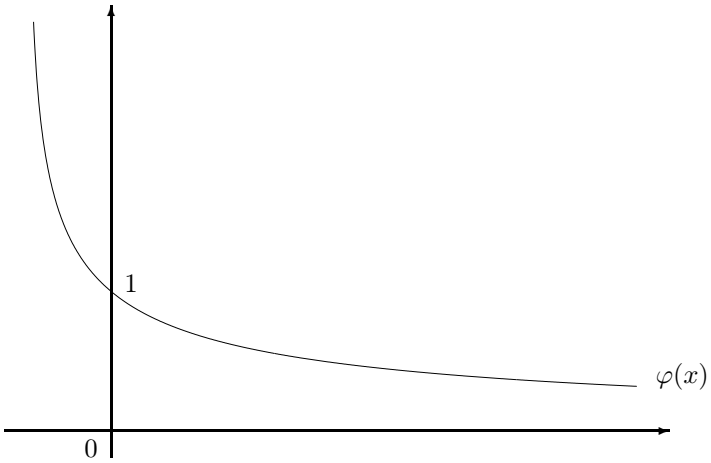
On procède ensuite par DL pour déterminer les dérivées de φ à gauche et à droite de 0 ; il faut pousser le développement limité de $\ln(1+x)$ jusqu'à ce que l'on connaisse le terme en x^2 du numérateur de $\dfrac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(x+1)}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D} \qquad \varphi'(x) &= \frac{1}{x^2(x+1)}\left(x-(1+x)\left[x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{O}\left(x^3\right)\right)\right] \\
&= \frac{(1+x)^{-1}}{x^2}\left[x-x+\frac{x^2}{2}-x^2+\mathrm{O}\left(x^3\right)\right] \\
&= \frac{1+\mathrm{O}\left(x\right)}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2}+\mathrm{O}\left(x^3\right)\right] \\
\varphi'(x) &= -\frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(x\right)
\end{aligned}$$

φ' admet la même limite $-\dfrac{1}{2}$ à droite et à gauche en 0, et c'est aussi la limite du taux d'accroissement en 0, donc la fonction φ' est prolongeable par la valeur $-\dfrac{1}{2}$ en 0. La fonction prolongée φ admet une dérivée continue sur $]-1\,;+\infty[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$.

I.6 Les questions précédentes permettent de dresser le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
φ'	‖		$-$		
φ	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



II.1 Montrons que la fonction $\widehat{f}\colon t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+x\sin t}$ est définie sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

$\sin t \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, donc $x\sin t \geqslant -\sin t$ dès que $x > -1$, avec égalité si et seulement si $t = 0$. Par suite, $1 + x\sin t \geqslant 1 - \sin t$ avec égalité si et seulement si $t = 0$, et on a alors $1 + x\sin t = 1$: on en conclut que

$$1 + x\sin t > 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \times \,]\,-1\,;+\infty\,[$$

ce qui montre que $\widehat{f}$ est définie sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

De plus, $\widehat{f}$ est continue sur cet intervalle comme produit de fonctions qui le sont, donc elle est intégrable sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. Autrement dit,

$$\boxed{g \text{ est définie sur }]\,-1\,;+\infty\,[.}$$

II.2 Recherchons une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{1+x\sin t}$. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+x\sin t) = x\cos t$, donc

$$g(x) = \left[\frac{1}{x}\ln(1+x\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \varphi(x)$$

II.3 La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin 2t}{1+x\sin t}$ est une fraction rationnelle en sinus et cosinus, donc on applique les règles de Bioche.

$\dfrac{\sin 2t}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t$ est invariant par le changement de variable $t \longleftrightarrow \pi - t$, donc on effectue dans l'intégrale le changement de variable $u = \sin t$ ($\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$). On a alors $\sin 2t\,\mathrm{d}t = 2u\cos t\dfrac{\mathrm{d}u}{\cos t} = 2u\,\mathrm{d}u$, d'où

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^1 \frac{2u}{1+xu}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2}{x} \times \frac{1+xu-1}{1+xu}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{x} \times \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+xu}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{x}\left[u - \frac{1}{x}\ln(1+xu)\right]_0^1 \\
g(x) &= \frac{2}{x}\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{II.4}}$ Pour tous $x, y \in \,]-1\,;+\infty\,[$

$$g(x) - g(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \times \frac{(y-x)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t$$

Si de plus x et y sont strictement supérieurs à un certain $a > -1$, on peut minorer le dénominateur : puisque $\sin t \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, $1 + x\sin t \geqslant 1 + a\sin t$ d'où

$$(1+x\sin t)(1+y\sin t) \geqslant (1+a\sin t)^2$$

On peut alors majorer l'intégrale :

$$|g(x) - g(y)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y-x)f(t)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|f(t)|}{(1+a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t \times |x-y|$$

Le terme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|f(t)|}{(1+a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$ est une constante (a étant fixé). Si on la note K, on a montré que pour tout $a > -1$ il existe une constante K telle que

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \mathrm{K}|x-y|$$

Cette relation montre que g est K-lipschitzienne, donc continue, sur $]\,a\,;+\infty\,[$. D'après le caractère local de la continuité, g est également continue sur

$$\bigcup_{a>-1} \,]\,a\,;+\infty\,[\, = \,]-1\,;+\infty\,[$$

> Il faut bien retenir cet argument, qui est pratique et classique : si une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ sur chaque ensemble $\mathrm{E}_i \subset \mathbb{R}$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur toute réunion (même non dénombrable) des E_i.
>
> Ceci devient particulièrement important dans l'étude des suites et séries de fonctions.

II.5 On a vu à la question précédente que

$$g(x) - g(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \times \frac{(y-x)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t$$

On a montré à la question II.1 que $1+\alpha\sin t > 0$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ pour tout $\alpha > -1$, et par hypothèse f est positive sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. On en déduit que $g(x)-g(y)$ est du signe de $y-x$ d'après la positivité de l'intégrale, ce qui montre que g est décroissante sur $]\,-1\,;+\infty\,[$.

II.6.a f est par hypothèse continue sur le compact (fermé-borné) $[\,0\,;\pi/2\,]$ donc elle est bornée sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. En particulier, elle est majorée sur cet intervalle.

II.6.b Le fait que $b \in\,]\,0\,;\pi/2\,]$ suggère d'utiliser la relation de Chasles :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{b} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t$$

On procède ensuite par majorations.

- Puisque $x > 0$ dans cette question, $1+x\sin t \geqslant 1$ donc

$$\int_0^{b} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t \quad\leqslant\quad \int_0^{b} \frac{\mathrm{M}}{1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}b$$

- La fonction sinus est croissante sur $[\,b\,;\pi/2\,]$, donc pour tout t dans cet intervalle $1+x\sin t \geqslant 1+x\sin b$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{M}}{1+x\sin b}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}}{1+x\sin b}\left(\frac{\pi}{2}-b\right) \\
\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{\mathrm{M}\pi}{2(1+x\sin b)}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\forall x > 0 \qquad g(x) \leqslant \mathrm{M}b + \dfrac{\mathrm{M}\pi}{2(1+x\sin b)}}$

II.6.c On a montré en II.1 que $1+x\sin t > 0$ pour $(t,x) \in [\,0\,;\pi/2\,]\times]\,-1\,;+\infty\,[$, et comme f est positive par hypothèse,

$$\forall x > -1 \qquad g(x) \geqslant 0$$

> La majoration faite à la question précédente donne envie d'utiliser le théorème des gendarmes, mais c'est impossible car Mb est une constante (rappelons qu'une fonction peut très bien être bornée sans admettre une

limite en l'infini – il suffit de considérer sinus). Le raisonnement naturel (avec les doigts, ce n'est pas une preuve) est alors :

1. Clairement, $\dfrac{\mathrm{M}\pi}{1+x\sin b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
2. On a alors, à peu de choses près, $g(x) \leqslant \mathrm{M}b$, qui est une constante, mais que l'on peut rendre arbitrairement petite en choisissant b ;
3. Donc g tend vers 0.

Lorsqu'il y a deux passages à la limite, la bonne technique est de raisonner avec des ε.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Prenons pour b la plus petite des deux valeurs $\dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. On a alors

$$\mathrm{M}b \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, $\dfrac{\mathrm{M}\pi}{2(1+x\sin b)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puisque $\sin b > 0$, donc il existe un réel x_0 (dépendant de b) tel que

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \frac{\mathrm{M}\pi}{2(1+x\sin b)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En réunissant les deux majorations précédentes, on obtient

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant \varepsilon$$

Cette relation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

II.7 **1re méthode : avec une primitive**

Pour tout $x \in [\,0\,;\pi/2\,[$,

$$\int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin t}\,\mathrm{d}t = [-\ln(1-\sin t)]_0^x = -\ln(1-\sin x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} +\infty$$

donc la fonction proposée n'est pas intégrable sur $[\,0\,;\pi/2\,[$.

2e méthode : avec un équivalent

Pour étudier le comportement de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ en $\dfrac{\pi}{2}$, posons $u = \dfrac{\pi}{2} - t$:

$$\frac{\cos t}{1-\sin t} = \frac{\sin u}{1-\cos u} \sim \frac{u}{1-\left(1-\dfrac{u^2}{2}\right)} = \frac{2}{u}$$

La fonction $u \longmapsto 1/u$ n'étant pas intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, la fonction proposée n'est pas intégrable sur $[\,0\,;\pi/2\,[$.

II.8.a On a montré que g est continue sur $]\,-1\,;+\infty\,[$ (question II.4) et décroissante sur le même intervalle (question II.5), donc elle admet une limite à droite en -1.

> C'est un théorème : si f est continue et monotone sur $]\,x_0\,;a\,[$ $(a > x_0)$ alors elle admet une limite à droite en x_0.
> On a bien sûr un théorème analogue à gauche de x_0.

II.8.b On a montré à la question II.2 que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + x \sin t}\,\mathrm{d}t = \varphi(x)$$

et d'après la question I.4, $\lim\limits_{x \to -1} \varphi(x) = +\infty$. Par contraposée de la proposition admise à la question II.8.b, on conclut que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ n'est pas intégrable sur $[\,0\,;\pi/2\,[$.

II.9 On sait que g est décroissante sur $]\,-1\,;+\infty\,[$ (question II.5), que sa limite en $+\infty$ est 0 (question II.6.c) et qu'elle admet une limite L en -1 (question II.8.a). On peut donc tracer le tableau suivant :

x	-1		$+\infty$
g	‖	L ↘	0