

# Table des matières

<i>Motivation du cours</i>	<b>xix</b>
<i>Index des notations</i>	<b>xxii</b>
<b>1 Rappels élémentaires sur la notion de convergence</b>	<b>1</b>
1.1 Suites dans un e.v.n.	1
1.1.a Définitions	1
1.1.b Suites de Cauchy	2
1.1.c Convergence double	3
1.2 Fonctions à valeurs dans un e.v.n.	4
1.2.a Convergence en un point d'une fonction	4
1.2.b Convergence uniforme	5
1.2.c Fonction de deux variables	8
1.3 Convergence d'une série	9
1.3.a Définitions	9
1.3.b Séries semi-convergentes, séries absolument convergentes	10
1.3.c Séries de fonctions	12
1.3.d Série doublement infinie	12
1.3.e Convergence d'une série double	13
1.4 Séries entières, fonctions analytiques	14
1.4.a Définitions	14
1.4.b Analyticité sur un intervalle	15
1.4.c Formules de Taylor et convergence	16
1.5 Séries asymptotiques et séries divergentes	17
1.5.a Séries asymptotiques	17
1.5.b Intérêt des séries divergentes	19
1.6 Permuter des limites en physique	22
1.6.a Deux paradoxes sur le théorème de l'énergie cinétique	23
1.6.b Roméo, Juliette et les fluides visqueux	26
1.6.c Barrière de potentiel en mécanique quantique	28
<i>Exercices</i>	32
<i>Solutions</i>	34
<b>2 Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue</b>	<b>37</b>
2.1 But du chapitre	37
2.2 Tribus ; boréliens	39
2.3 Mesure de Lebesgue	40
2.3.a Mesure sur $\mathbb{R}$	41
2.3.b Mesure sur $\mathbb{R}^n$	44
2.4 Construction de l'intégrale de Lebesgue	44
2.5 Propriétés supplémentaires	47
2.5.a Théorème d'Égorov	47
2.5.b Ensembles de mesure nulle	48
2.5.c Comparaison entre intégrales de Lebesgue et de Riemann	49
2.5.d Et aujourd'hui?	49

<i>Exercices</i> . . . . .	50
<i>Solutions</i> . . . . .	52
<b>3 Calcul intégral</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1 Résumé sur la mesure et l'intégrale de Lebesgue . . . . .	53
3.2 La convergence en pratique . . . . .	54
3.3 Intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	55
3.4 Interversion de l'ordre d'intégration . . . . .	57
3.5 Changement de variables . . . . .	57
<i>Exercices</i> . . . . .	60
<i>Solutions</i> . . . . .	60
<b>4 Analyse complexe I</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1 Fonctions holomorphes . . . . .	61
4.1.a Définitions . . . . .	62
4.1.b Exemples . . . . .	64
4.1.c Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ . . . . .	65
4.1.d Premier résultat sur les fonctions analytiques . . . . .	66
4.2 Le théorème de Cauchy . . . . .	67
4.2.a Intégration sur des chemins . . . . .	67
4.2.b Intégrales sur un cercle . . . . .	70
4.2.c Indice d'un chemin . . . . .	70
4.2.d Divers théorèmes de Cauchy . . . . .	71
4.2.e Application . . . . .	73
4.3 Propriétés des fonctions holomorphes . . . . .	73
4.3.a Formule de Cauchy et applications . . . . .	73
4.3.b Théorème du maximum . . . . .	77
4.3.c Autres théorèmes . . . . .	78
4.3.d Classification des zéros d'une fonction holomorphe . . . . .	79
4.4 Singularités d'une fonction . . . . .	81
4.4.a Classification des singularités . . . . .	81
4.4.b Fonctions méromorphes . . . . .	83
4.5 Séries de Laurent . . . . .	84
4.5.a Introduction et définition . . . . .	84
4.5.b Exemples de séries de Laurent . . . . .	86
4.5.c Théorème des résidus . . . . .	86
4.5.d Calculs pratiques des résidus . . . . .	88
4.6 Application aux calculs d'intégrales... . . . .	89
4.6.a Lemmes de Jordan . . . . .	89
4.6.b Intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle . . . . .	90
4.6.c Intégrales de type Fourier . . . . .	92
4.6.d Intégrales sur le cercle unité d'une fraction rationnelle . . . . .	93
4.6.e Calcul de sommes infinies . . . . .	94
<i>Exercices</i> . . . . .	97
<i>Solutions</i> . . . . .	101
<b>5 Analyse complexe II</b> . . . . .	<b>107</b>
5.1 Logarithme complexe; fonctions multivaluées . . . . .	107
5.1.a Les logarithmes complexes . . . . .	107
5.1.b La fonction racine carrée . . . . .	109
5.1.c Fonctions multivaluées; surfaces de Riemann . . . . .	109
5.2 Fonctions harmoniques . . . . .	111
5.2.a Définitions . . . . .	111

5.2.b	Propriétés . . . . .	112
5.2.c	Une astuce pour trouver $f$ en connaissant $u$ . . . . .	114
5.3	Prolongements analytiques . . . . .	115
5.4	Singularités à l'infini . . . . .	116
5.5	Méthode du col . . . . .	119
5.5.a	Méthode générale du col . . . . .	119
5.5.b	La méthode du col réel . . . . .	122
	<i>Exercices</i> . . . . .	123
	<i>Solutions</i> . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Transformations conformes</b> . . . . .	<b>125</b>
6.1	Transformations conformes . . . . .	125
6.1.a	Généralités . . . . .	125
6.1.b	Théorème de Riemann . . . . .	127
6.1.c	Exemples de transformations conformes . . . . .	128
6.1.d	La transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	130
6.2	Application à la théorie du potentiel . . . . .	133
6.2.a	Application à l'électrostatique . . . . .	134
6.2.b	Application à l'hydrodynamique . . . . .	136
6.2.c	Théorie du potentiel, paratonnerres, percolation . . . . .	138
6.3	Problème de Dirichlet et noyau de Poisson . . . . .	139
	<i>Exercices</i> . . . . .	143
	<i>Solutions</i> . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Distributions I</b> . . . . .	<b>147</b>
7.1	Approche physique . . . . .	147
7.1.a	Problème des distributions de charges . . . . .	147
7.1.b	Problème de l'impulsion et des forces lors d'un choc élastique . . . . .	149
7.2	Définitions et exemples de distributions . . . . .	150
7.2.a	Distributions régulières . . . . .	152
7.2.b	Distributions singulières . . . . .	153
7.2.c	Support d'une distribution . . . . .	154
7.2.d	Autres exemples . . . . .	155
7.3	Propriétés élémentaires. Opérations . . . . .	155
7.3.a	Opérations sur les distributions . . . . .	155
7.3.b	Dérivée d'une distribution . . . . .	158
7.4	Dirac et ses dérivés . . . . .	160
7.4.a	Distribution de Heaviside . . . . .	160
7.4.b	Distributions de Dirac à plusieurs dimensions . . . . .	161
7.4.c	La distribution $\delta'$ . . . . .	162
7.4.d	Composition de $\delta$ avec une fonction . . . . .	164
7.4.e	Densités de charge et de courant . . . . .	165
7.5	Dérivation d'une fonction discontinue . . . . .	167
7.5.a	Dérivation d'une fonction discontinue en un point . . . . .	167
7.5.b	Dérivation d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$ . . . . .	169
7.5.c	Laplacien d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$ . . . . .	172
7.5.d	Application : laplacien de $1/r$ en trois dimensions . . . . .	172
7.6	La convolution . . . . .	174
7.6.a	Produit tensoriel de deux fonctions . . . . .	174
7.6.b	Produit tensoriel de deux distributions . . . . .	175
7.6.c	Convolution de deux fonctions . . . . .	176
7.6.d	Notion de mesure floue . . . . .	178
7.6.e	Convolution de deux distributions . . . . .	178

7.6.f	Applications . . . . .	180
7.6.g	Équation de Poisson . . . . .	181
7.7	Interprétation physique des opérateurs de convolution . . . . .	182
7.8	Convolution discrète . . . . .	183
<b>8</b>	<b>Distributions II</b>	<b>187</b>
8.1	Valeur principale de Cauchy . . . . .	187
8.1.a	Définition . . . . .	187
8.1.b	Application au calcul de certaines intégrales . . . . .	188
8.1.c	Notations de Feynman . . . . .	189
8.1.d	Relations de Kramers-Kronig . . . . .	191
8.2	Notions de topologie dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	192
8.2.a	Convergence faible dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	193
8.2.b	Suites de fonctions convergeant vers $\delta$ . . . . .	193
8.2.c	Convergence dans $\mathcal{D}'$ et convergence au sens des fonctions . . . . .	196
8.2.d	Régularisation d'une distribution . . . . .	196
8.2.e	Continuité de la convolution . . . . .	197
8.3	Algèbres de convolution . . . . .	198
8.4	Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales . . . . .	200
8.4.a	Cas d'une équation du premier ordre . . . . .	200
8.4.b	Cas de l'oscillateur harmonique . . . . .	201
8.4.c	Autres équations provenant de la physique . . . . .	202
	<i>Exercices</i> . . . . .	203
	<i>Solutions</i> . . . . .	206
<b>9</b>	<b>Espaces de Hilbert ; séries de Fourier</b>	<b>211</b>
9.1	Insuffisance des espaces vectoriels . . . . .	211
9.2	Espaces de Hilbert . . . . .	213
9.2.a	Espaces préhilbertiens . . . . .	213
9.2.b	Espaces de Hilbert . . . . .	215
9.2.c	Systèmes orthonormés, bases hilbertiennes . . . . .	216
9.2.d	L'espace $\ell^2$ . . . . .	220
9.2.e	L'espace $L^2[0, a]$ . . . . .	220
9.2.f	L'espace $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	221
9.3	Développement en série de Fourier . . . . .	222
9.3.a	Coefficients de Fourier d'une fonction . . . . .	222
9.3.b	Convergence quadratique . . . . .	223
9.3.c	Série de Fourier d'une fonction $f \in L^1[0, a]$ . . . . .	225
9.3.d	Convergence ponctuelle de la série de Fourier . . . . .	225
9.3.e	Convergence uniforme de la série de Fourier . . . . .	227
9.3.f	Phénomène de Gibbs . . . . .	228
	<i>Exercices</i> . . . . .	228
	<i>Solutions</i> . . . . .	230
<b>10</b>	<b>Transformée de Fourier des fonctions</b>	<b>235</b>
10.1	Transformée de Fourier d'une fonction de $L^1$ . . . . .	235
10.1.a	Définition . . . . .	236
10.1.b	Exemples . . . . .	237
10.1.c	Espace $L^1$ . . . . .	237
10.1.d	Propriétés élémentaires . . . . .	238
10.1.e	Inversion . . . . .	240
10.1.f	Extension de la formule d'inversion . . . . .	242
10.2	Propriétés de la transformation de Fourier . . . . .	243

10.2.a	Transposition et translation . . . . .	243
10.2.b	Changement d'échelle . . . . .	243
10.2.c	Dérivation . . . . .	244
10.2.d	Fonctions à décroissance rapide . . . . .	245
10.3	Transformée de Fourier d'une fonction de $L^2$ . . . . .	246
10.3.a	Espace $\mathcal{S}$ . . . . .	246
10.3.b	Transformée de Fourier dans $L^2$ . . . . .	247
10.4	Transformées de Fourier et convolution . . . . .	249
10.4.a	Formule de convolution . . . . .	249
10.4.b	Limitations de la formule de convolution . . . . .	250
10.5	Conventions différentes . . . . .	250
	<i>Exercices</i> . . . . .	250
	<i>Solutions</i> . . . . .	252
<b>11</b>	<b>Transformée de Fourier des distributions</b> . . . . .	<b>255</b>
11.1	Définition et propriétés . . . . .	255
11.1.a	Distributions tempérées . . . . .	256
11.1.b	Transformées de Fourier des distributions tempérées . . . . .	257
11.1.c	Exemples . . . . .	258
11.1.d	Transformation de Fourier à plusieurs dimensions . . . . .	260
11.2	Peigne de Dirac . . . . .	261
11.2.a	Définition et propriétés . . . . .	261
11.2.b	Transformée de Fourier d'une fonction périodique . . . . .	263
11.2.c	Formule sommatoire de Poisson . . . . .	264
11.2.d	Application aux calculs de séries . . . . .	264
11.3	Phénomène de Gibbs . . . . .	266
11.4	Application à l'optique physique . . . . .	268
11.4.a	Lien entre diaphragme et figure de diffraction . . . . .	268
11.4.b	Diaphragme composé d'une infinité de fentes infiniment fines . . . . .	270
11.4.c	Nombre fini de fentes infiniment fines . . . . .	270
11.4.d	Nombre fini de fentes de dimension finie . . . . .	273
11.4.e	Pupille circulaire . . . . .	274
11.5	Limitations de l'analyse de Fourier et ondelettes . . . . .	275
	<i>Exercices</i> . . . . .	278
	<i>Solutions</i> . . . . .	280
<b>12</b>	<b>Transformation de Laplace</b> . . . . .	<b>285</b>
12.1	Définition et sommabilité . . . . .	285
12.1.a	Définition . . . . .	286
12.1.b	Sommabilité . . . . .	287
12.1.c	Propriétés de la transformée . . . . .	290
12.2	Inversion . . . . .	290
12.3	Propriétés élémentaires et exemples de transformées de Laplace . . . . .	292
12.3.a	Propriétés . . . . .	292
12.3.b	Dérivation et intégration . . . . .	293
12.3.c	Exemples . . . . .	294
12.4	Transformation de Laplace des distributions . . . . .	295
12.4.a	Définition . . . . .	295
12.4.b	Propriétés . . . . .	295
12.4.c	Exemples . . . . .	297
12.4.d	Transformée en $z$ . . . . .	297
12.4.e	Lien entre transformées de Laplace et de Fourier . . . . .	298

12.5	Applications physiques, problème de Cauchy . . . . .	299
12.5.a	Importance du problème de Cauchy . . . . .	299
12.5.b	Un exemple simple . . . . .	299
12.5.c	Évolution libre du champ électromagnétique . . . . .	300
<i>Exercices</i>	. . . . .	303
<i>Solutions</i>	. . . . .	304
<b>13</b>	<b>Applications physiques de la transformée de Fourier</b>	<b>305</b>
13.1	Justification de l'analyse en régime sinusoïdal . . . . .	305
13.2	Champs longitudinaux et transverses . . . . .	307
13.3	Relations d'incertitude de Heisenberg . . . . .	308
13.4	Signaux analytiques . . . . .	314
13.5	Autocorrélation d'une fonction d'énergie finie . . . . .	316
13.5.a	Définition . . . . .	316
13.5.b	Propriétés . . . . .	317
13.5.c	Intercorrélation . . . . .	318
13.6	Fonctions de puissance finie . . . . .	318
13.6.a	Définitions . . . . .	318
13.6.b	Autocorrélation . . . . .	319
13.7	Application à l'optique : théorème de Wiener-Khintchine . . . . .	319
<i>Exercices</i>	. . . . .	323
<i>Solutions</i>	. . . . .	324
<b>14</b>	<b>Fonctions de Green</b>	<b>325</b>
14.1	Généralités sur les fonctions de Green . . . . .	325
14.2	Électromagnétisme et opérateur de d'Alembert . . . . .	327
14.2.a	Calcul des fonctions de Green avancée et retardée . . . . .	327
14.2.b	Potentiels retardés . . . . .	330
14.2.c	Écriture covariante des fonctions de Green avancée et retardée . . . . .	333
14.2.d	Rayonnement . . . . .	334
14.3	Équation de la chaleur . . . . .	335
14.3.a	Cas unidimensionnel . . . . .	335
14.3.b	Cas tridimensionnel . . . . .	338
14.4	Mécanique quantique . . . . .	339
14.5	Équation de Klein-Gordon . . . . .	341
<i>Exercice</i>	. . . . .	344
<b>15</b>	<b>Tenseurs</b>	<b>345</b>
15.1	Tenseurs dans un espace affine . . . . .	345
15.1.a	Vecteurs . . . . .	346
15.1.b	Convention d'Einstein . . . . .	347
15.1.c	Formes linéaires . . . . .	348
15.1.d	Applications linéaires . . . . .	350
15.1.e	Transformations de Lorentz . . . . .	350
15.2	Produit tensoriel d'espaces. Tenseurs . . . . .	351
15.2.a	Existence du produit tensoriel de deux espaces . . . . .	351
15.2.b	Produit tensoriel de deux formes linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{0}{2}$ . . . . .	352
15.2.c	Produit tensoriel de deux vecteurs : tenseurs d'ordre $\binom{2}{0}$ . . . . .	354
15.2.d	Applications linéaires ou tenseurs $\binom{1}{1}$ . . . . .	355
15.2.e	Tenseurs d'ordre $\binom{p}{q}$ . . . . .	357

15.3	Métrie . . . . .	358
15.3.a	Métrie et pseudo-métrie . . . . .	358
15.3.b	Dualité naturelle par la métrie . . . . .	359
15.3.c	Gymnastique : élever et abaisser des indices . . . . .	361
15.4	Opérations sur les tenseurs . . . . .	363
15.5	Changements de coordonnées . . . . .	365
15.5.a	Coordonnées curvilignes . . . . .	365
15.5.b	Vecteurs de base . . . . .	366
15.5.c	Transformation des vecteurs physiques . . . . .	368
15.5.d	Transformation des formes linéaires . . . . .	369
15.5.e	Transformation d'un champ de tenseurs quelconque . . . . .	369
15.5.f	Brève conclusion . . . . .	370
<b>16</b>	<b>Formes différentielles</b> . . . . .	<b>373</b>
16.1	Algèbre extérieure . . . . .	373
16.1.a	1-formes . . . . .	373
16.1.b	2-formes extérieures . . . . .	374
16.1.c	$k$ -formes extérieures . . . . .	375
16.1.d	Produit extérieur . . . . .	377
16.2	Formes différentielles sur un espace vectoriel . . . . .	378
16.2.a	Définition . . . . .	378
16.2.b	Dérivée extérieure . . . . .	379
16.3	Intégration des formes différentielles . . . . .	380
16.4	Théorème de Poincaré . . . . .	382
16.5	Lien avec le calcul vectoriel : gradient, divergence, rotationnel . . . . .	384
16.5.a	Formes différentielles en dimension 3 . . . . .	384
16.5.b	Existence du potentiel scalaire électrostatique . . . . .	386
16.5.c	Existence du potentiel vecteur . . . . .	387
16.5.d	Monopôles magnétiques . . . . .	388
16.6	L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles . . . . .	388
16.6.a	Tenseur de Faraday . . . . .	388
16.6.b	Remarque sur l'électromagnétisme en 2D . . . . .	391
<b>17</b>	<b>Groupes et représentations de groupes</b> . . . . .	<b>397</b>
17.1	Groupes . . . . .	397
17.2	Représentations linéaires des groupes . . . . .	398
17.3	Le groupe $SO(3)$ et les vecteurs . . . . .	399
17.4	Le groupe $SU(2)$ et les spineurs . . . . .	403
17.5	Sphère de Riemann et spin . . . . .	408
	<i>Exercice</i> . . . . .	409
<b>18</b>	<b>Introduction aux probabilités</b> . . . . .	<b>411</b>
18.1	Introduction . . . . .	412
18.2	Définitions élémentaires . . . . .	413
18.3	Formule de Poincaré . . . . .	417
18.4	Probabilités conditionnelles . . . . .	418
18.5	Événements indépendants . . . . .	420
<b>19</b>	<b>Variables aléatoires</b> . . . . .	<b>421</b>
19.1	Variables aléatoires et lois . . . . .	421
19.2	Fonction de répartition et densité de probabilité . . . . .	424
19.2.a	Variable aléatoire discrète . . . . .	425
19.2.b	Variable aléatoire (absolument) continue . . . . .	426

19.3	Espérance et variance . . . . .	426
19.3.a	Cas des v.a. discrètes . . . . .	426
19.3.b	Cas des v.a. continues . . . . .	427
19.4	Un exemple : la loi de Poisson . . . . .	429
19.4.a	Particules d'un gaz confiné . . . . .	429
19.4.b	Désintégration radioactive . . . . .	430
19.5	Moments d'une variable aléatoire . . . . .	430
19.6	Vecteurs aléatoires . . . . .	432
19.6.a	Couple de variables aléatoires . . . . .	432
19.6.b	Variables aléatoires indépendantes . . . . .	436
19.6.c	Vecteurs aléatoires . . . . .	437
19.7	Mesures images . . . . .	438
19.7.a	Cas d'une seule variable aléatoire . . . . .	438
19.7.b	Cas d'un vecteur aléatoire . . . . .	439
19.8	Espérance et fonction caractéristique . . . . .	439
19.8.a	Espérance d'une fonction . . . . .	439
19.8.b	Moments, variance . . . . .	440
19.8.c	Fonction caractéristique . . . . .	440
19.8.d	Fonction génératrice . . . . .	441
19.9	Somme et produit de variables aléatoires . . . . .	442
19.9.a	Somme de v.a. . . . .	442
19.9.b	Produit de v.a. . . . .	444
19.9.c	Exemple : loi de Poisson . . . . .	445
19.10	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	445
19.10.a	Énoncé . . . . .	445
19.10.b	Application : l'aiguille de Buffon . . . . .	447
19.11	Indépendance, corrélation, causalité... . . . .	448
<b>20</b>	<b>Théorème central limite</b> . . . . .	<b>449</b>
20.1	Divers types de convergence . . . . .	449
20.2	Loi des grands nombres . . . . .	451
20.3	Théorème central limite . . . . .	452
20.4	Application . . . . .	454
	<i>Exercices</i> . . . . .	455
	<i>Solutions</i> . . . . .	460



**Annexes**

<b>A Rappels sur la topologie et les e.v.n.</b>	<b>467</b>
1.1 Topologie, espace topologique . . . . .	467
1.2 Espaces vectoriels normés . . . . .	470
A.2.a Normes, semi-normes . . . . .	470
A.2.b Boules et topologie . . . . .	471
A.2.c Comparaison de suites . . . . .	473
A.2.d Théorèmes de Bolzano-Weierstrass . . . . .	473
A.2.e Comparaison des normes . . . . .	473
A.2.f Norme linéaire . . . . .	475
<i>Exercice</i> . . . . .	475
<i>Solution</i> . . . . .	476
<b>B Rappels élémentaires sur le calcul différentiel</b>	<b>477</b>
2.1 Différentielle d'une application à valeurs réelles . . . . .	477
B.1.a Fonction réelle de la variable réelle . . . . .	477
B.1.b Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	478
B.1.c Notations tensorielles . . . . .	479
2.2 Différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ . . . . .	479
2.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	480
<b>C Quelques démonstrations</b>	<b>483</b>

**Tables**

Table des transformées de Fourier, de Laplace	493
Table des lois usuelles	498
Bibliographie	499
Références bibliographiques	503
Table des portraits	509
Table des encadrés	511
Index	512